Tema 5. Aritmètica d'enters i coma flotant

Joan Manuel Parcerisa

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat d'Informàtica de Barcelona

FIB

Aritmètica d'enters

- Suma i resta
- Multiplicació
- Divisió

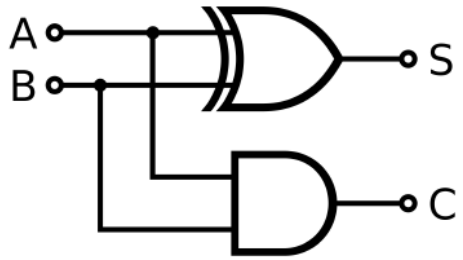
Suma de naturals i enters

A	B	Suma	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Suma de naturals i enters

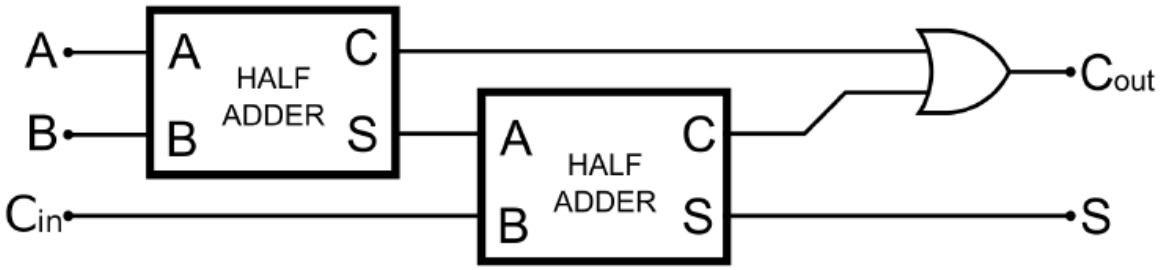
A	B	Suma	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

- Half Adder



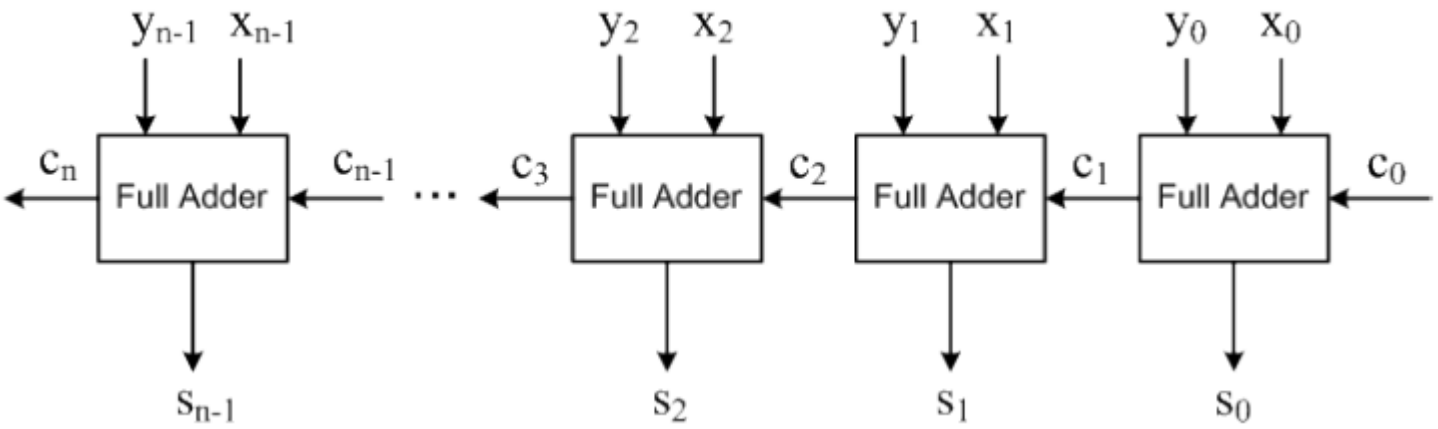
Suma de naturals i enters

- Full Adder



Suma de naturals i enters

- Sumador de *n* bits amb propagació de carry



- El mateix sumador per a naturals i enters en Ca2

Resta d'enters

- La Resta

  $$D = A - B$$

  equival a

  $$D = A + (-B)$$

Resta d'enters

- La Resta

  $$D = A - B$$

  equival a

  $$D = A + (-B)$$

- Hardware: sumador de n bits (canviant el signe de B)
  - Invertir els bits de B...
    - Amb una porta NOT a cada bit
  - ... i sumar 1
    - Fent el carry inicial c_0=1

Overflow de suma i resta d'enters

- Overflow d'una operació
  - Si el resultat no pertany al rang de l'operació → **Incorrecte!**
  - Rang d'enters en Ca2 amb *n* bits: $[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$

Overflow de suma i resta d'enters

- Overflow d'una operació
  - Si el resultat no pertany al rang de l'operació → **Incorrecte!**
  - Rang d'enters en Ca2 amb *n* bits: $[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$
- Operació suma d'enters
  - **Overflow**: Si operands del mateix signe però resultat de signe contrari

Overflow de suma i resta d'enters

- Overflow d'una operació
  - Si el resultat no pertany al rang de l'operació → **Incorrecte!**
  - Rang d'enters en Ca2 amb *n* bits: $[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$
- Operació suma d'enters
  - **Overflow**: Si operands del mateix signe però resultat de signe contrari
- Operació resta d'enters
  - Terminologia

$$diferència = minuend - substraend$$

Overflow de suma i resta d'enters

- Overflow d'una operació
  - Si el resultat no pertany al rang de l'operació → **Incorrecte!**
  - Rang d'enters en Ca2 amb *n* bits: $[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$
- Operació suma d'enters
  - **Overflow**: Si operands del mateix signe però resultat de signe contrari
- Operació resta d'enters
  - Terminologia

$$diferència = minuend - substraend$$

  - Si la reformulem

$$minuend = substraend + diferència$$

  - **Overflow**: Si substraend i diferència són del mateix signe però el minuend és de signe contrari

Detecció d'overflow

- Com detecta el hardware que hi ha overflow?
  - Naturals: si $c_n = 1$ ($overflow = c_n$)
  - Enters: si $c_{n-1} \neq c_n$ ($overflow = c_{n-1} \oplus c_n$)

Detecció d'overflow

- Com detecta el hardware que hi ha overflow?
  - Naturals: si $c_n = 1$ ($overflow = c_n$)
  - Enters: si $c_{n-1} \neq c_n$ ($overflow = c_{n-1} \oplus c_n$)
- Instruccions MIPS
  - `add`, `addi`, `sub` l'overflow d'enters causa excepció
  - `addu`, `addiu`, `subu` l'overflow s'ignora

Detecció d'overflow

- Com detecta el hardware que hi ha overflow?
  - Naturals: si $c_n = 1$ ($overflow = c_n$)
  - Enters: si $c_{n-1} \neq c_n$ ($overflow = c_{n-1} \oplus c_n$)
- Instruccions MIPS
  - `add`, `addi`, `sub` l'overflow d'enters causa excepció
  - `addu`, `addiu`, `subu` l'overflow s'ignora
- En alguns llenguatges d'alt nivell, l'overflow d'enters ha de causar excepció (però no si són naturals)
  - `add`, `addi`, `sub` per a enters
  - `addu`, `addiu`, `subu` per a naturals

Detecció d'overflow

- Com detecta el hardware que hi ha overflow?
  - Naturals: si $c_n = 1$ ($overflow = c_n$)
  - Enters: si $c_{n-1} \neq c_n$ ($overflow = c_{n-1} \oplus c_n$)
- Instruccions MIPS
  - `add`, `addi`, `sub` l'overflow d'enters causa excepció
  - `addu`, `addiu`, `subu` l'overflow s'ignora
- En alguns llenguatges d'alt nivell, l'overflow d'enters ha de causar excepció (però no si són naturals)
  - `add`, `addi`, `sub` per a enters
  - `addu`, `addiu`, `subu` per a naturals

- En C, s'ignoren els overflows
  - Usarem `addu`, `addiu`, `subu` tant per a enters com naturals

Detecció d'overflow

- Com pot detectar el software que hi ha overflow?
  - MIPS no té instruccions específiques

Detecció d'overflow

- Com pot detectar el software que hi ha overflow?
  - MIPS no té instruccions específiques

- Però es pot calcular: suposem la suma $s = a+b$

$$overflow = \overline{(a_{31} \oplus b_{31})} \cdot (a_{31} \oplus s_{31})$$

Detecció d'overflow

- Com pot detectar el software que hi ha overflow?
  - MIPS no té instruccions específiques

- Però es pot calcular: suposem la suma $s = a+b$

$$overflow = (\overline{a_{31} \oplus b_{31}}) \cdot (a_{31} \oplus s_{31})$$

- En assemblador:

```
addu   $t2, $t0, $t1   # a + b
```

Detecció d'overflow

- Com pot detectar el software que hi ha overflow?
  - MIPS no té instruccions específiques

- Però es pot calcular: suposem la suma $s = a+b$

$$overflow = \overline{(a_{31} \oplus b_{31})} \cdot (a_{31} \oplus s_{31})$$

- En assemblador:

```
addu   $t2, $t0, $t1   # a + b
xor    $t3, $t0, $t1   # a xor b
nor    $t3, $t3, $zero
```

Detecció d'overflow

- Com pot detectar el software que hi ha overflow?
  - MIPS no té instruccions específiques

- Però es pot calcular: suposem la suma $s = a+b$

$$overflow = (\overline{a_{31} \oplus b_{31}}) \cdot (a_{31} \oplus s_{31})$$

- En assemblador:

```
addu   $t2, $t0, $t1   # a + b
xor    $t3, $t0, $t1   # a xor b
nor    $t3, $t3, $zero
xor    $t4, $t0, $t2   # a xor s
```

Detecció d'overflow

- Com pot detectar el software que hi ha overflow?
  - MIPS no té instruccions específiques

- Però es pot calcular: suposem la suma $s = a+b$

$$overflow = \overline{(a_{31} \oplus b_{31})} \cdot (a_{31} \oplus s_{31})$$

- En assemblador:

```
addu   $t2, $t0, $t1   # a + b
xor    $t3, $t0, $t1   # a xor b
nor    $t3, $t3, $zero
xor    $t4, $t0, $t2   # a xor s
and    $t3, $t3, $t4
```

Detecció d'overflow

- Com pot detectar el software que hi ha overflow?
  - MIPS no té instruccions específiques

- Però es pot calcular: suposem la suma $s = a+b$

$$overflow = \overline{(a_{31} \oplus b_{31})} \cdot (a_{31} \oplus s_{31})$$

- En assemblador:

```
addu   $t2, $t0, $t1   # a + b
xor    $t3, $t0, $t1   # a xor b
nor    $t3, $t3, $zero
xor    $t4, $t0, $t2   # a xor s
and    $t3, $t3, $t4
srl    $t3, $t3, 31    # mou el bit 31 a posició 0
```

Aritmètica d'enters

- Suma i resta
- Multiplicació
- Divisió

Multiplicació de naturals

- En base 10

	348	multiplicand
x	951	multiplicador
	348	= 348 x 1
	1740	= 348 x 50
+	3132	= 348 x 900
	330948	

Multiplicació de naturals: 1010 x 1101

- En base 2

	1010	multiplicand
x	1101	multiplicador
	1010	= 1010 x 1
	0000	= 1010 x 00
	1010	= 1010 x 100
+	1010	= 1010 x 1000
	10000010	

- Problema: hem d'emmagatzemar els 4 productes parcials per fer la suma final

Multiplicació de naturals: 1010 x 1101

- Solució: acumular els productes parcials
  - Sols hem de guardar el valor acumulat (P)

Inicialment, P=0: 0 0 0 0 0 0 0 0 = P_0

Multiplicació de naturals: 1010 x 1101

- Solució: acumular els productes parcials
  - Sols hem de guardar el valor acumulat (P)

Acumulem el primer producte

$$
\begin{array}{lll}
 & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 & = P_0 \\
1010 \times 1 = & 1\ 0\ 1\ 0\ + & \\
\hline
 & 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 & = P_1
\end{array}
$$

Multiplicació de naturals: 1010 x 1101

- Solució: acumular els productes parcials
  - Sols hem de guardar el valor acumulat (P)

Acumulem el segon producte

$$
\begin{array}{lll}
 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & = P_0 \\
1010 \times 1 = & 1\,0\,1\,0 + & \\
\hline
 & 0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0 & = P_1 \\
1010 \times 00 = & 0\,0 + & \\
\hline
 & 0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0 & = P_2
\end{array}
$$

Multiplicació de naturals: 1010 x 1101

- Solució: acumular els productes parcials
  - Sols hem de guardar el valor acumulat (P)

Acumulem el tercer producte

		0 0 0 0 0 0 0 0	$= P_0$
1010 x 1	=	1 0 1 0 +	
		0 0 0 0 1 0 1 0	$= P_1$
1010 x 00	=	0 0 +	
		0 0 0 0 1 0 1 0	$= P_2$
1010 x 100	=	1 0 1 0 0 0 +	
		0 0 1 1 0 0 1 0	$= P_3$

Multiplicació de naturals: 1010 x 1101

- Solució: acumular els productes parcials
  - Sols hem de guardar el valor acumulat (P)

Acumulem el quart producte

$$
\begin{array}{lll}
 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & = P_0 \\
1010 \times 1 = & 1\,0\,1\,0 + & \\
\hline
 & 0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0 & = P_1 \\
1010 \times 00 = & 0\,0 + & \\
\hline
 & 0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0 & = P_2 \\
1010 \times 100 = & 1\,0\,1\,0\,0\,0 + & \\
\hline
 & 0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0 & = P_3 \\
1010 \times 1000 = & 1\,0\,1\,0\,0\,0\,0 + & \\
\hline
 & 1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0 & = P_4
\end{array}
$$

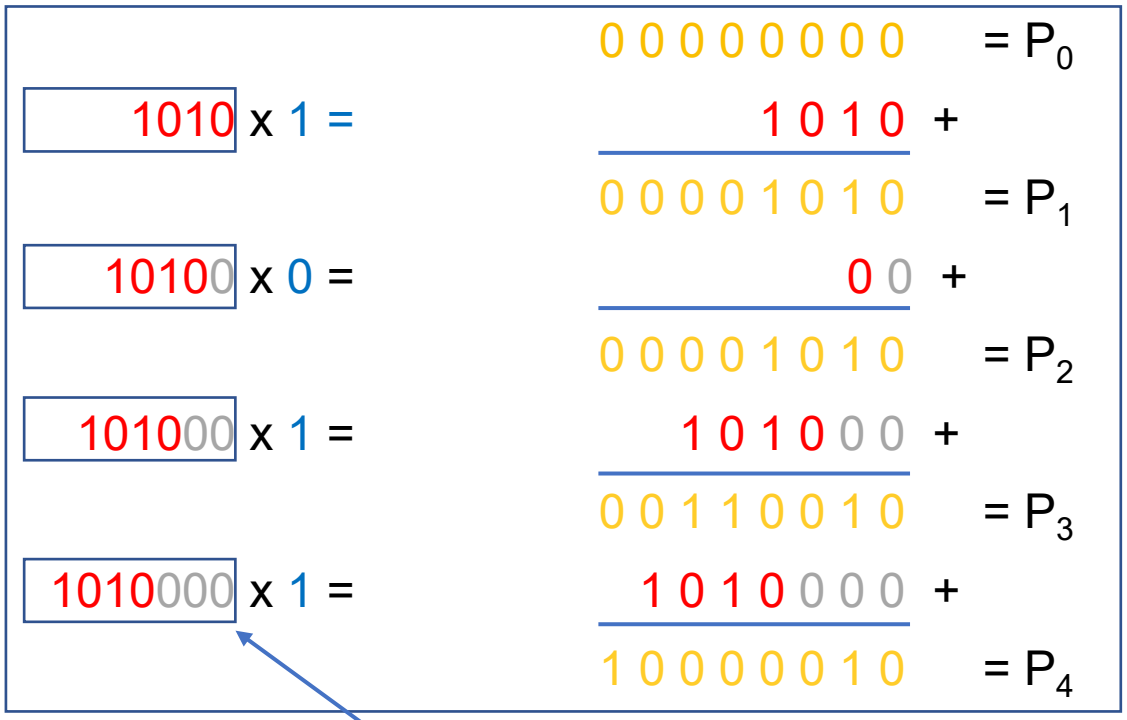
Multiplicació de naturals: 1010 x 1101

- Solució: acumular els productes parcials
  - Sols hem de guardar el valor acumulat (P)

O bé amb desplaçaments del multiplicand

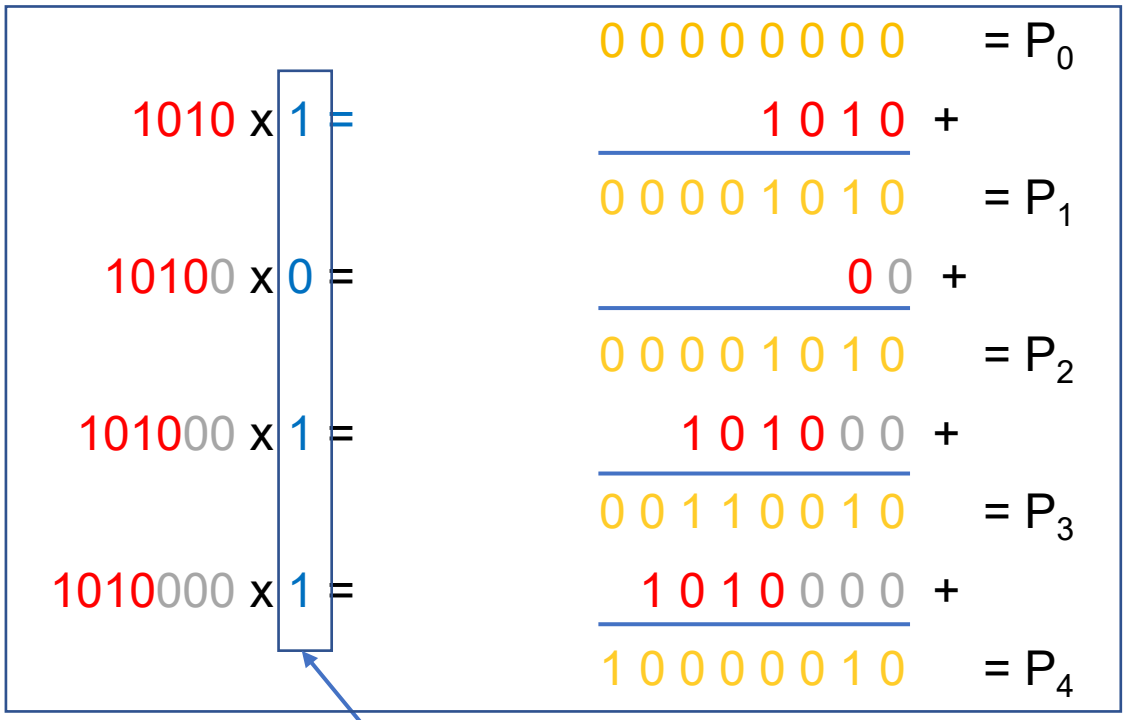
$$
\begin{array}{lll}
 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & = P_0 \\
1010 \times 1 = & 1\,0\,1\,0 + & \\
\hline
 & 0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0 & = P_1 \\
10100 \times 0 = & 0\,0 + & \\
\hline
 & 0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0 & = P_2 \\
101000 \times 1 = & 1\,0\,1\,0\,0\,0 + & \\
\hline
 & 0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0 & = P_3 \\
1010000 \times 1 = & 1\,0\,1\,0\,0\,0\,0 + & \\
\hline
 & 1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0 & = P_4
\end{array}
$$

Multiplicació de naturals: 1010 x 1101



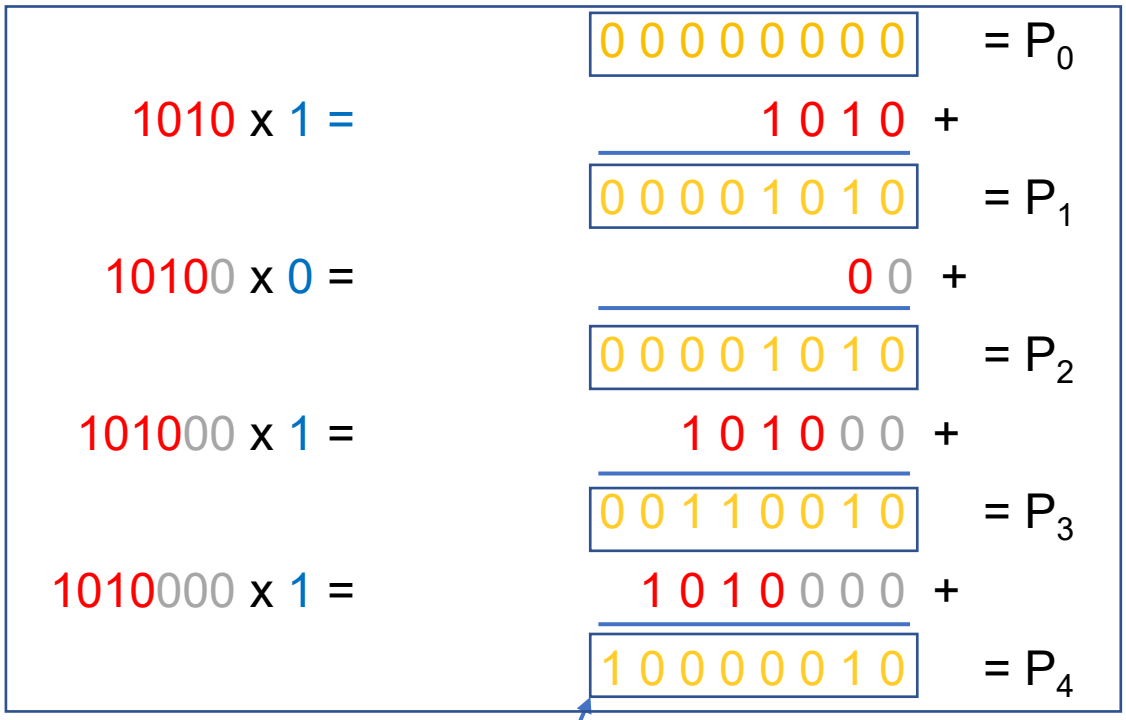
- Hardware necessari per al multiplicador seqüencial:
  - Registre Multiplicand **MD** = 00001010 (8 bits), *shifta* a l'esquerra

Multiplicació de naturals: 1010 x 1101



- Hardware necessari per al multiplicador seqüencial:
  - Registre Multiplicand **MD** = 00001010 (8 bits), *shifta* a l'esquerra
  - Registre Multiplicador **MR =** 1101 (4 bits), que *shifta* a la dreta (per consultar el bit de menys pes a cada pas)

Multiplicació de naturals: 1010 x 1101



- Hardware necessari per al multiplicador seqüencial:
  - Registre Multiplicand **MD** = 00001010 (8 bits), *shifta* a l'esquerra
  - Registre Multiplicador **MR** = 1101 (4 bits), que *shifta* a la dreta (per consultar el bit de menys pes a cada pas)
  - Registre Producte **P** = 00000000 (8 bits), acumula els parcials

Multiplicació de naturals: 1010 x 1101

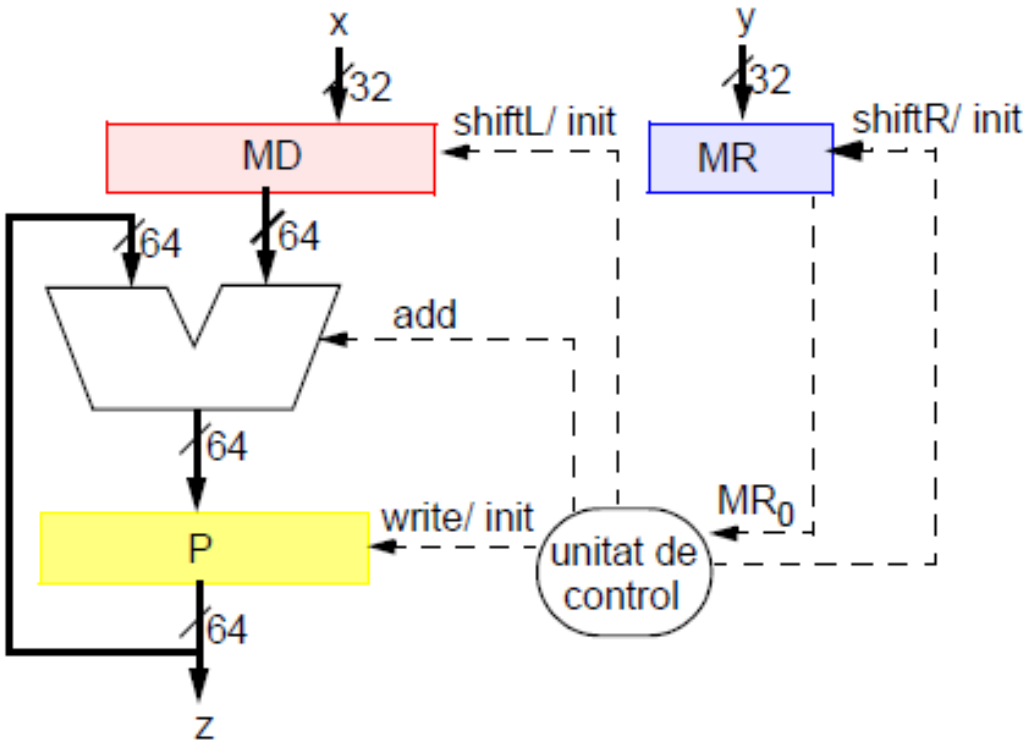
	0 0 0 0 0 0 0 0	= P_0
1010 x 1 =	1 0 1 0 +	
	0 0 0 0 1 0 1 0	= P_1
10100 x 0 =	0 0 +	
	0 0 0 0 1 0 1 0	= P_2
101000 x 1 =	1 0 1 0 0 0 +	
	0 0 1 1 0 0 1 0	= P_3
1010000 x 1 =	1 0 1 0 0 0 0 +	
	1 0 0 0 0 0 1 0	= P_4

- Hardware necessari per al multiplicador seqüencial:
  - Registre Multiplicand **MD** = 00001010 (8 bits), *shifta* a l'esquerra
  - Registre Multiplicador **MR** = 1101 (4 bits), que *shifta* a la dreta (per consultar el bit de menys pes a cada pas)
  - Registre Producte **P** = 00000000 (8 bits), acumula els parcials
  - **Sumador** de 8 bits

Multiplicació de naturals de 32 bits: circuit

- Naturals de 32 bits amb resultat de 64 bits
  - Tarda 33 cicles... (suposant que una suma de 64 bits tarda 1 cicle)

Multiplicador seqüencial de naturals: z = x * y



Pseudocodi

```
// Inicialització
MD0:31 = x; MD32:63 = 0;
P  = 0;
MR = y;

for (i=1; i<=32; i++)
{
      if (MR0 == 1)
            P = P + MD;
      MD = MD << 1;
      MR = MR >> 1;
}
z = P;
```

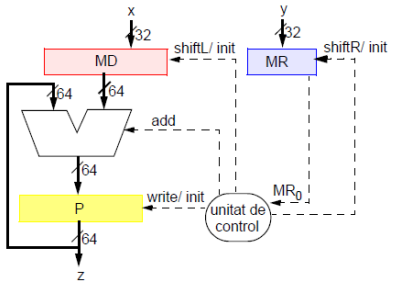
Multiplicació de naturals x, y: 1010 × 1101

Init: Inicialitzem $MD_{4:7} = 0$; $MD_{0:3} = x$
$MR = y$
$P = 0$

Iter.	MD (Multiplicand)								MR (Multiplicador)				P (Producte)							
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**

```
MD0:31 = x; MD32:63 = 0;
P  = 0;
MR = y;

for (i=1; i<=32; i++)
{
      if (MR0 == 1)
            P = P + MD;
      MD = MD << 1;
      MR = MR >> 1;
}
z = P;
```



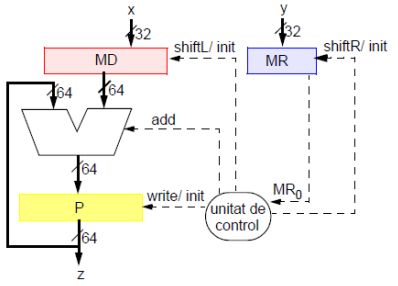
Multiplicació de naturals

Iter. 1: Com que **MR_0=1**, sumem P = P + MD

P	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
MD	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**
P'	0	0	0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**

Iter.	MD (Multiplicand)								MR (Multiplicador)				P (Producte)							
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
1													0	0	0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**

```
if (MR0 == 1)
        P = P + MD;
MD = MD << 1;
MR = MR >> 1;
```

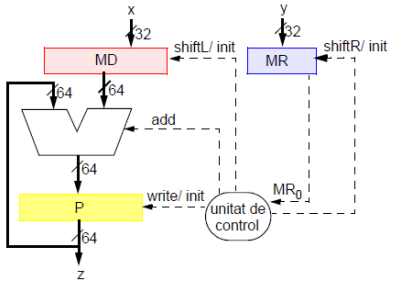


Multiplicació de naturals

Iter. 1: Com que MR_0=1, sumem P = P + MD
Desplacem **MD** a esquerra i **MR** a dreta

Iter.	MD (Multiplicand)								MR (Multiplicador)				P (Producte)							
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
1	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	**1**	**1**	**0**	0	0	0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**

```
if (MR0 == 1)
        P = P + MD;
MD = MD << 1;
MR = MR >> 1;
```

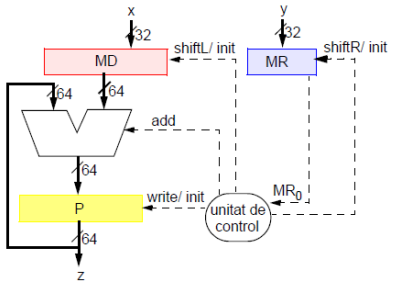


Multiplicació de naturals

Iter. 2: Com que **MR_0=0**, P no es modifica

Iter.	MD (Multiplicand)								MR (Multiplicador)				P (Producte)							
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
1	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	**1**	**1**	**0**	0	0	0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
2													0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**

```
if (MR0 == 1)
        P = P + MD;
MD = MD << 1;
MR = MR >> 1;
```

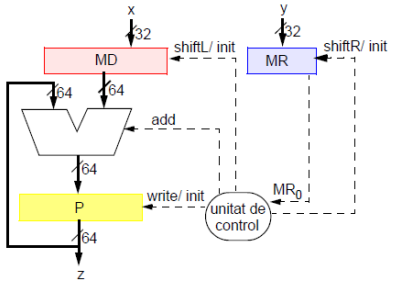


Multiplicació de naturals

Iter. 2: Com que MR_0=0, P no es modifica
Desplacem **MD** a esquerra i **MR** a dreta

Iter.	MD (Multiplicand)								MR (Multiplicador)				P (Producte)							
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
1	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	**1**	**1**	**0**	0	0	0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
2	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**

```
if (MR0 == 1)
        P = P + MD;
MD = MD << 1;
MR = MR >> 1;
```



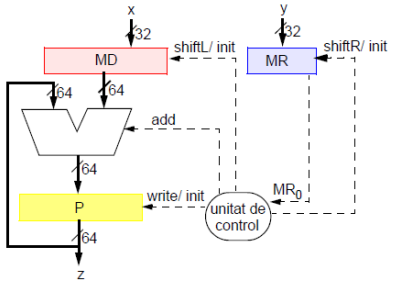
Multiplicació de naturals

Iter. 3: Com que **MR_0=1**, sumem P = P + MD

P	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
MD	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0
P'	0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**

Iter.	MD (Multiplicand)								MR (Multiplicador)				P (Producte)							
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
1	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	**1**	**1**	**0**	0	0	0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
2	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
3													0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**

```
if (MR0 == 1)
        P = P + MD;
MD = MD << 1;
MR = MR >> 1;
```

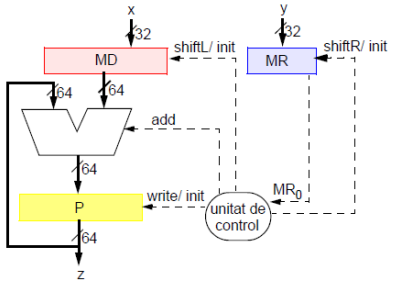


Multiplicació de naturals

Iter. 3: Com que MR_0=1, sumem P = P + MD
Desplacem **MD** a esquerra i **MR** a dreta

Iter.	MD (Multiplicand)								MR (Multiplicador)				P (Producte)							
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
1	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	**1**	**1**	**0**	0	0	0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
2	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
3	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**1**	0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**

```
if (MR0 == 1)
        P = P + MD;
MD = MD << 1;
MR = MR >> 1;
```



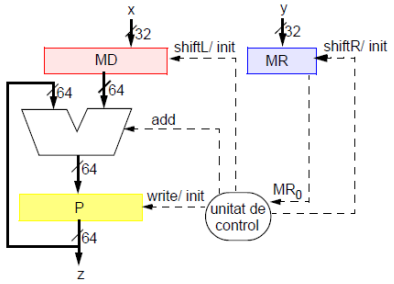
Multiplicació de naturals

Iter. 4: Com que **MR_0=1**, sumem P = P + MD

P	0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
MD	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	0
P'	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**

Iter.	MD (Multiplicand)								MR (Multiplicador)				P (Producte)							
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
1	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	**1**	**1**	**0**	0	0	0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
2	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
3	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**1**	0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
4													**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**

```
if (MR0 == 1)
        P = P + MD;
MD = MD << 1;
MR = MR >> 1;
```

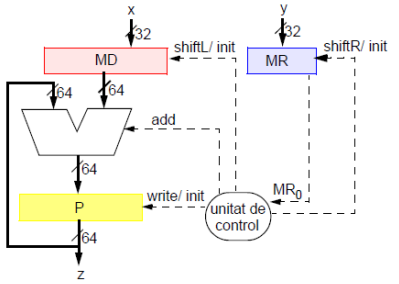


Multiplicació de naturals

Iter. 4: Com que MR_0=1, sumem P = P + MD
Desplacem **MD** a esquerra i **MR** a dreta

Iter.	MD (Multiplicand)								MR (Multiplicador)				P (Producte)							
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
1	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	**1**	**1**	**0**	0	0	0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
2	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
3	0	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**1**	0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
4	**1**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**

```
if (MR0 == 1)
        P = P + MD;
MD = MD << 1;
MR = MR >> 1;
```

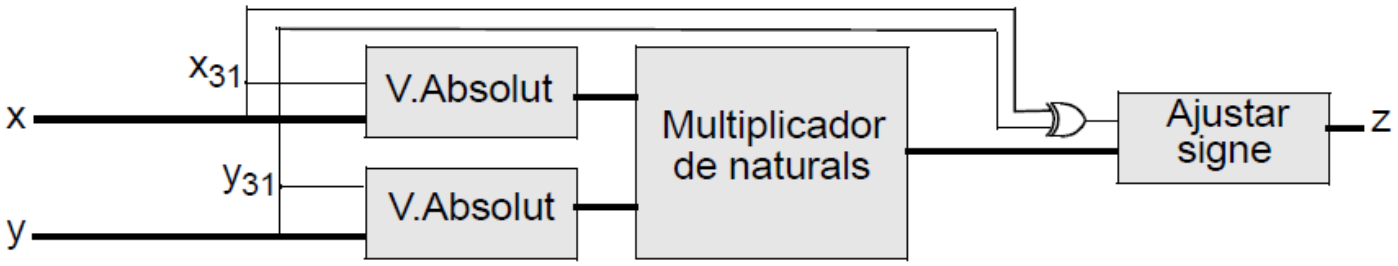


Multiplicació d'enters

1. Calcular els valors absoluts
2. Multiplicar valors absoluts (producte de naturals)
3. Canviar el signe del resultat si els operands tenen signe diferent

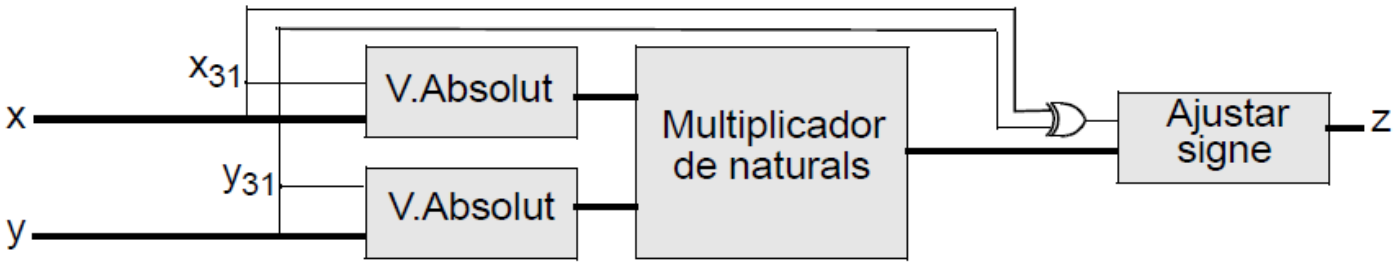
Multiplicació d'enters

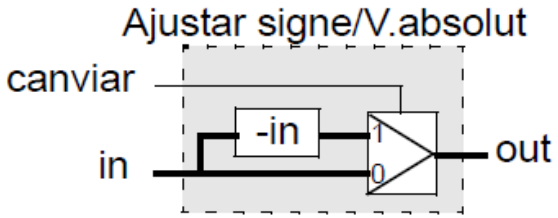
1. Calcular els valors absoluts
2. Multiplicar valors absoluts (producte de naturals)
3. Canviar el signe del resultat si els operands tenen signe diferent



Multiplicació d'enters

1. Calcular els valors absoluts
2. Multiplicar valors absoluts (producte de naturals)
3. Canviar el signe del resultat si els operands tenen signe diferent





Multiplicació d'enters

- Instruccions MIPS

```
mult      rs, rt        # $hi:$lo ← rs * rt (enters)
multu     rs, rt        # $hi:$lo ← rs * rt (naturals)
```

Multiplicació d'enters

- Instruccions MIPS

```
mult      rs, rt        # $hi:$lo ← rs * rt (enters)
multu     rs, rt        # $hi:$lo ← rs * rt (naturals)
```

- `$hi` i `$lo` són registres especials
  - No es poden usar a la resta d'instruccions estudiades fins ara

Multiplicació d'enters

- Instruccions MIPS

```
mult      rs, rt        # $hi:$lo ← rs * rt (enters)
multu     rs, rt        # $hi:$lo ← rs * rt (naturals)
```

- `$hi` i `$lo` són registres especials
  - No es poden usar a la resta d'instruccions estudiades fins ara
- Per moure el resultat a registres de propòsit general:

```
mflo      rd            # rd ← $lo
mfhi      rd            # rd ← $hi
```

Multiplicació d'enters

- Instruccions MIPS

```
mult      rs, rt        # $hi:$lo ← rs * rt (enters)
multu     rs, rt        # $hi:$lo ← rs * rt (naturals)
```

- `$hi` i `$lo` són registres especials
  - No es poden usar a la resta d'instruccions estudiades fins ara
- Per moure el resultat a registres de propòsit general:

```
mflo      rd            # rd ← $lo
mfhi      rd            # rd ← $hi
```

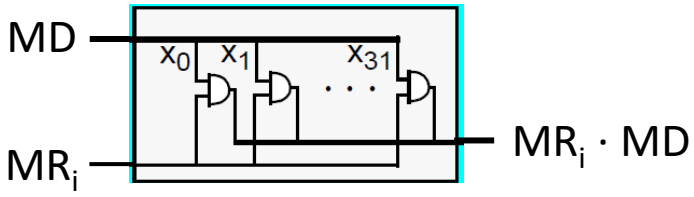
- Overflow
  - Naturals

    si `$hi` ≠ `0`
  - Enters

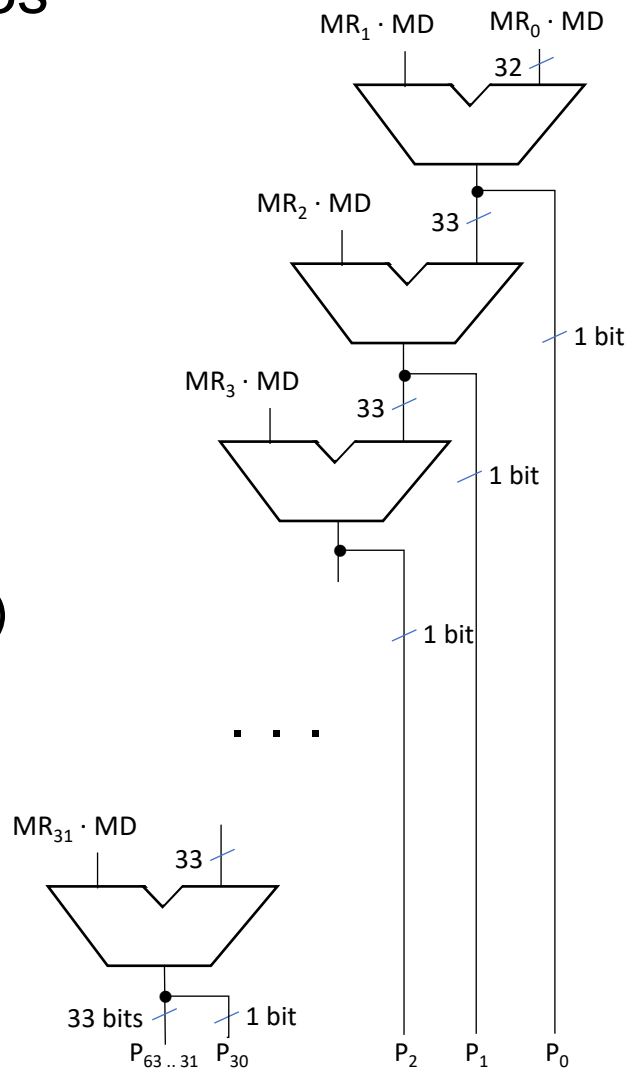
    si `$hi:$lo` no és l'extensió de signe de `$lo`

Matriu de sumadors amb propagació de carry

- Multiplicar consisteix a sumar diversos productes parcials desplaçats
- Productes parcials, amb portes AND

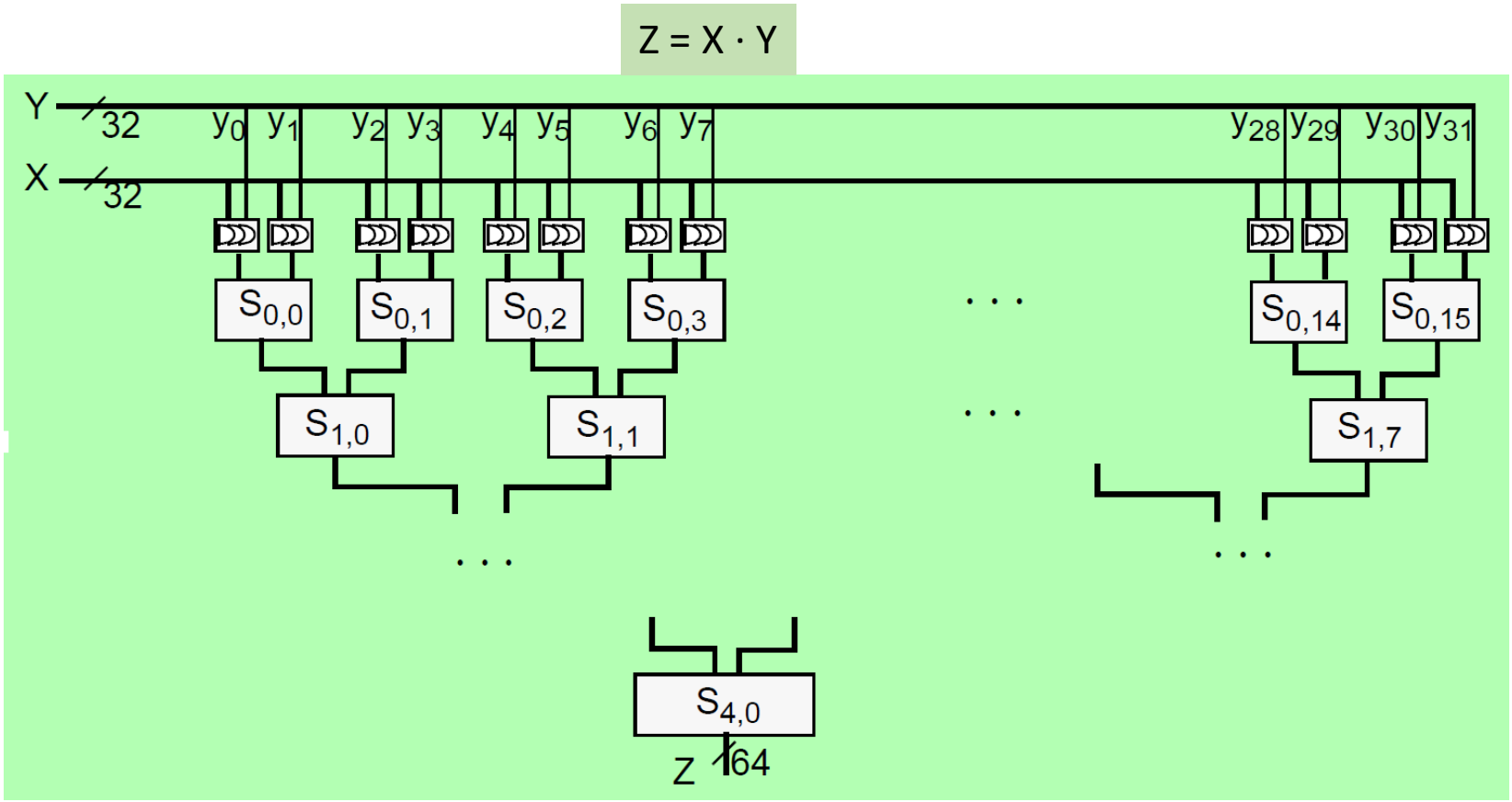


- 31 sumadors de 33 bits, cadascun
  - Resultat de 34 bits: carry(1) + suma (33)
  - Els 33 de + pes es passen al següent
  - El de menys pes és el P_i final
- Retard
  - aproximadamente el de 31 sumes



Matriu de sumadors amb propagació de carry

- Si reestructurem el circuit en forma d'arbre
  - Podem fer moltes sumes en paral·lel
- Retard: aproximadamente el de 5 sumadors



Aritmètica d'enters

- Suma i resta
- Multiplicació
- Divisió

Divisió de naturals

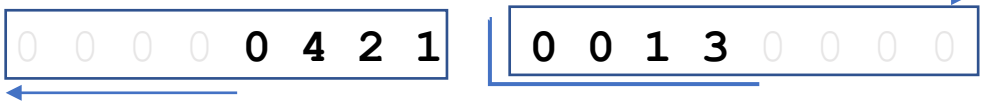
- En base 10 (4 dígits): 0421 / 0013

Dividend → 0 4 2 1 | 0 0 1 3 ← Divisor

Divisió de naturals

- En base 10 (4 dígits): 0421 / 0013

Dividend →

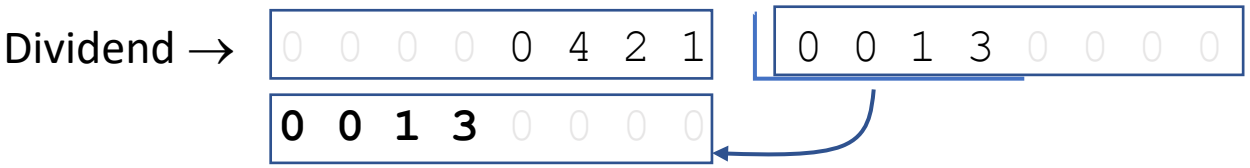


← Divisor

Inicialment extenem
el dividend 0421
i el divisor 0013
a 8 dígits...

Divisió de naturals

- En base 10 (4 dígits): 0421 / 0013

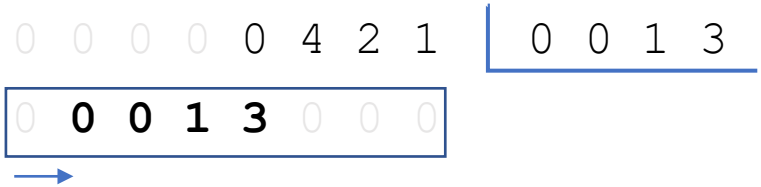


← Divisor

... i ubiquem el divisor 0013 a sota el dividend

Divisió de naturals

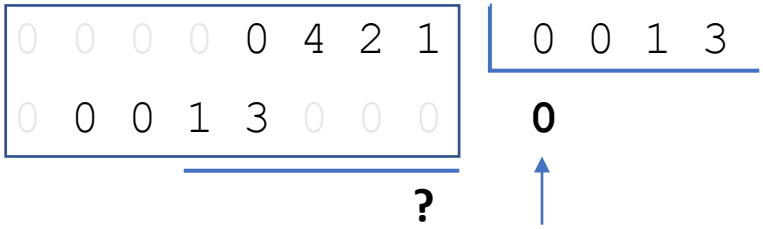
- En base 10 (4 dígits): 0421 / 0013



Pas 1.- Desplacem 0013 un lloc a la dreta...

Divisió de naturals

- En base 10 (4 dígits): 0421 / 0013



... i comparem amb el dividend:

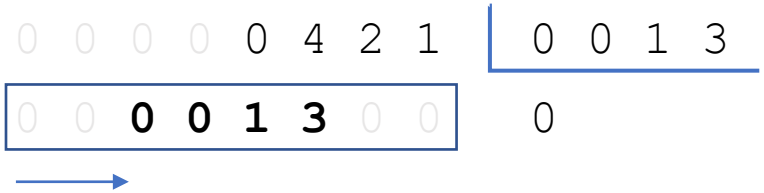
421 - 13000 < 0

No hi cap:

→ 0 al quocient

Divisió de naturals

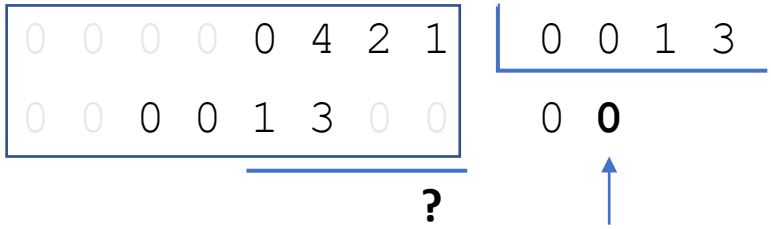
- En base 10 (4 dígits): 0421 / 0013



Pas 2.- Desplacem 0013 un lloc més...

Divisió de naturals

- En base 10 (4 dígits): 0421 / 0013



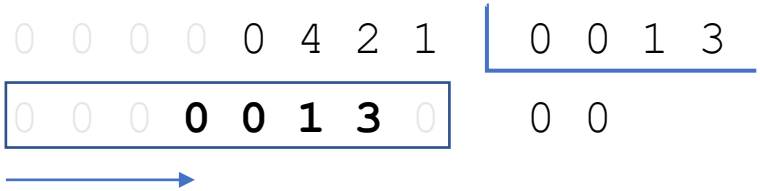
i comparem:
421 - 1300 < 0

No hi cap:

→ 0 al quocient

Divisió de naturals

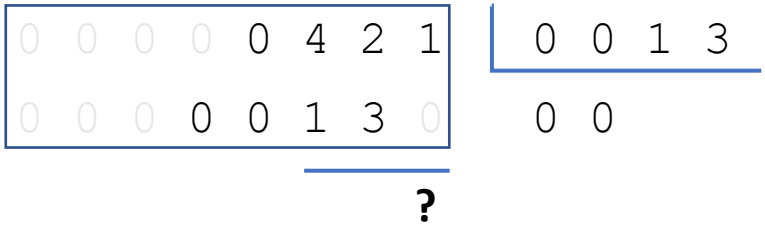
- En base 10 (4 dígits): 0421 / 0013



Pas 3.- Desplacem 0013 un lloc més...

Divisió de naturals

- En base 10 (4 dígits): 0421 / 0013

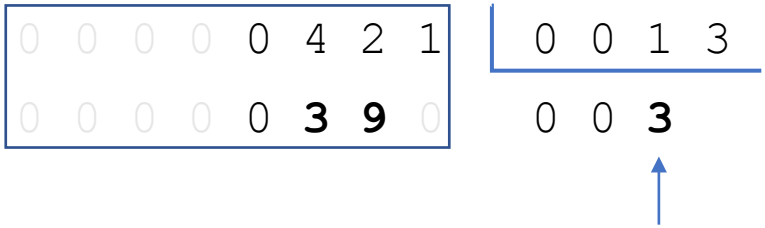


i comparem:
421 – 130 ≥ 0

Hi cap

Divisió de naturals

- En base 10 (4 dígits): 0421 / 0013



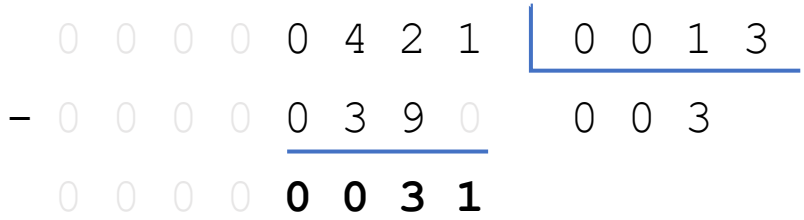
Hi cap a 3:

$3 \times 130 = 390$

$\rightarrow$ 3 al quocient

Divisió de naturals

- En base 10 (4 dígits): 0421 / 0013

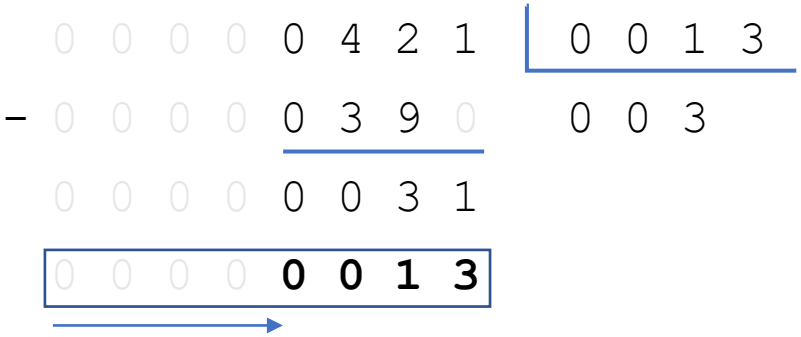


I restem:

421 – 390 = 31

Divisió de naturals

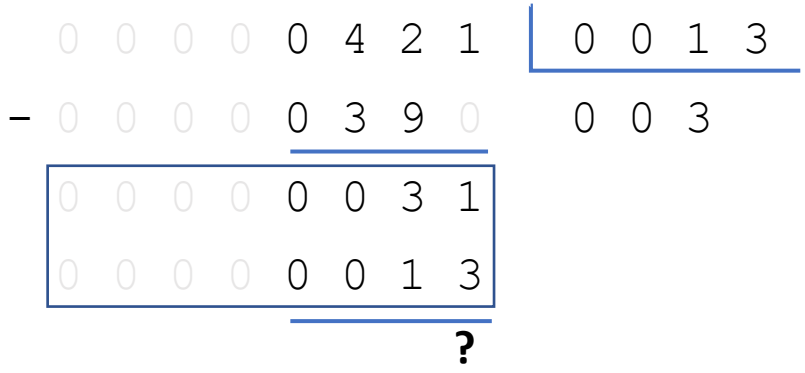
- En base 10 (4 dígits): 0421 / 0013



Pas 4.- Desplacem 0013 un lloc més...

Divisió de naturals

- En base 10 (4 dígits): 0421 / 0013



i comparem:
31 – 13 >= 0

Hi cap

Divisió de naturals

- En base 10 (4 dígits): 0421 / 0013

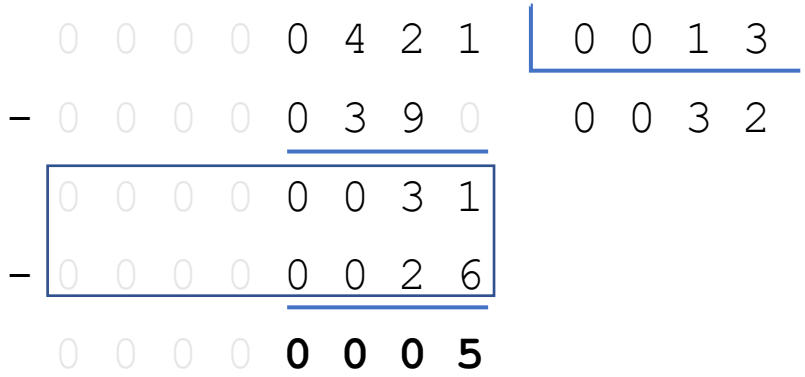
Hi cap a 2:

$2 \times 13 = 26$

$\rightarrow$ 2 al quocient

Divisió de naturals

- En base 10 (4 dígits): 0421 / 0013

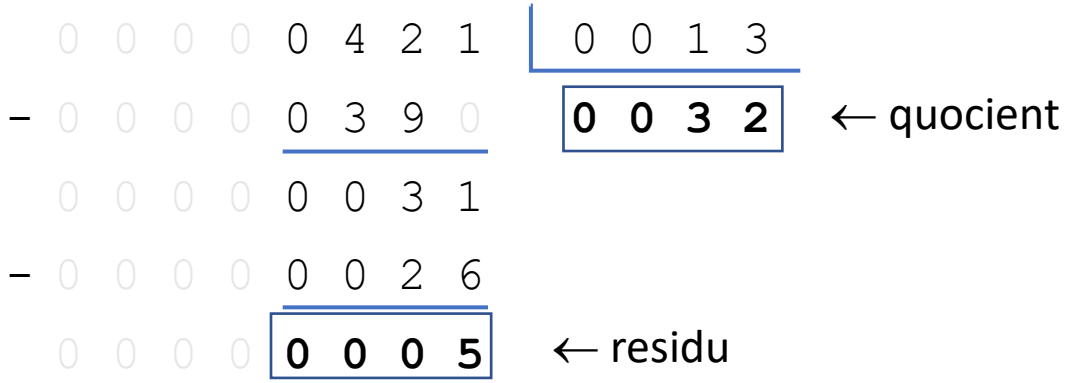


i restem:

31 -26 = 5

Divisió de naturals

- En base 10 (4 dígits): 0421 / 0013



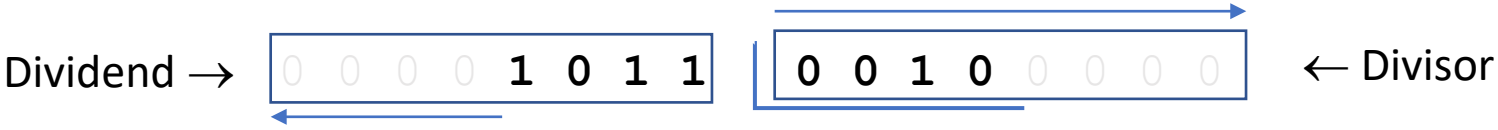
Divisió de naturals

- En base 2 (4 dígits): 1011 / 0010

Dividend → 1 0 1 1 | 0 0 1 0 ← Divisor

Divisió de naturals

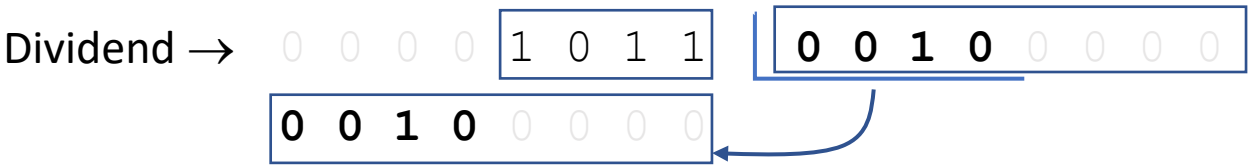
- En base 2 (4 dígits): 1011 / 0010



Inicialment extenem
el dividend 1011
i el divisor 0010
a 8 dígits...

Divisió de naturals

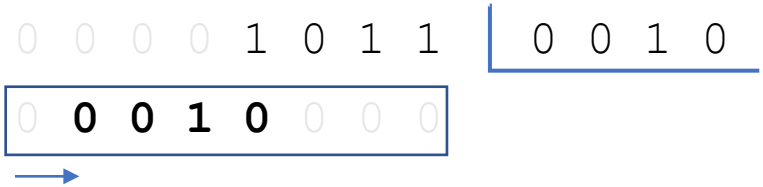
- En base 2 (4 dígits): 1011 / 0010



... i ubiquem el divisor 0010 a sota el dividend

Divisió de naturals

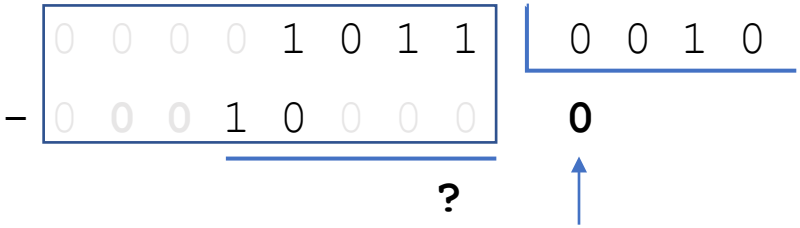
- En base 2 (4 dígits): 1011 / 0010



Pas 1.- Desplacem 0010 un lloc a la dreta...

Divisió de naturals

- En base 2 (4 dígits): 1011 / 0010



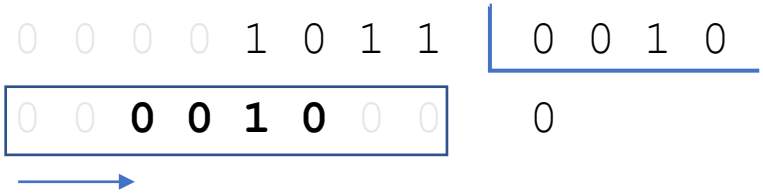
... i comparem (restem) :
1011 – 10000 < 0

No hi cap:

→ 0 al quocient

Divisió de naturals

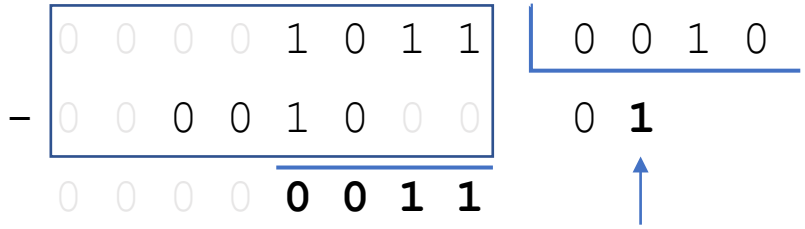
- En base 2 (4 dígits): 1011 / 0010



Pas 2.- Desplacem 0010 un lloc més...

Divisió de naturals

- En base 2 (4 dígits): 1011 / 0010



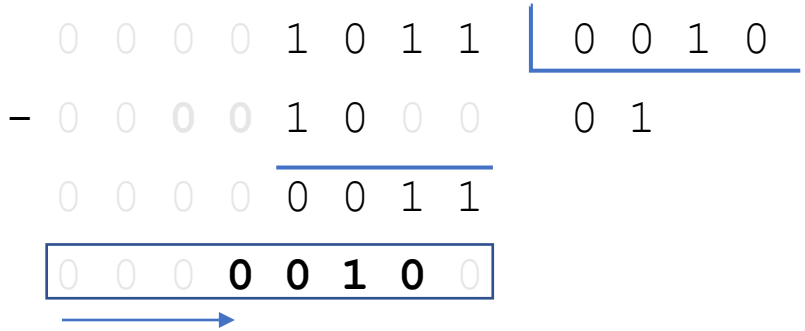
... i comparem (restem):
1011 – 1000 = 11

Hi cap:
11 ≥ 0

→ 1 al quocient

Divisió de naturals

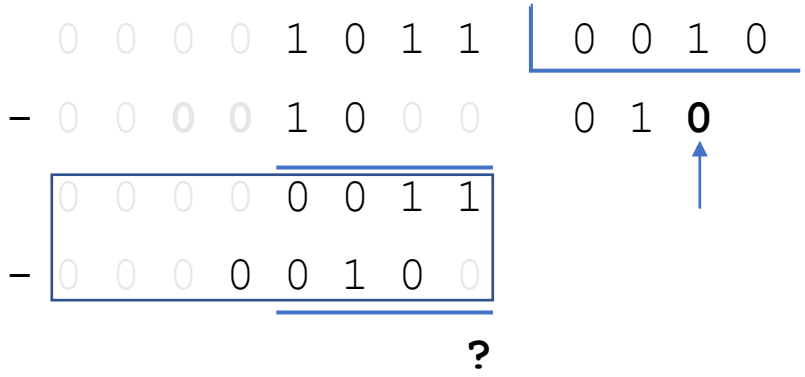
- En base 2 (4 dígits): 1011 / 0010



Pas 3.- Desplacem 0010 un lloc més...

Divisió de naturals

- En base 2 (4 dígits): 1011 / 0010



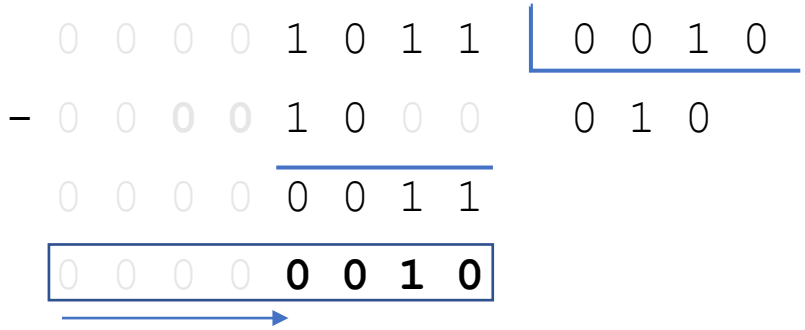
... i comparem (restem):
11 – 100 < 0

No hi cap

→ 0 al quocient

Divisió de naturals

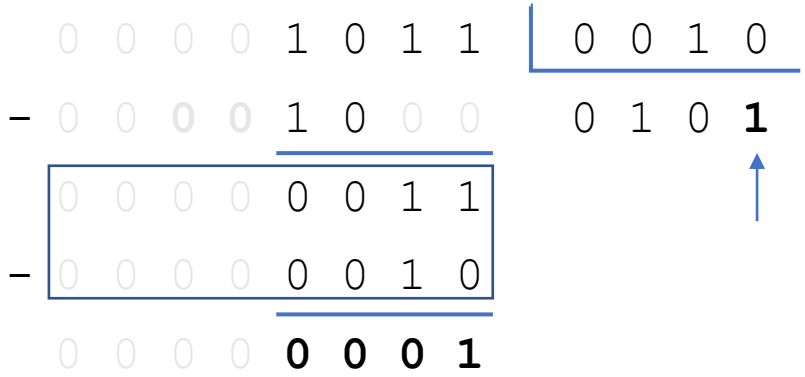
- En base 2 (4 dígits): 1011 / 0010



Pas 4.- Desplacem 0010 un lloc més...

Divisió de naturals

- En base 2 (4 dígits): 1011 / 0010



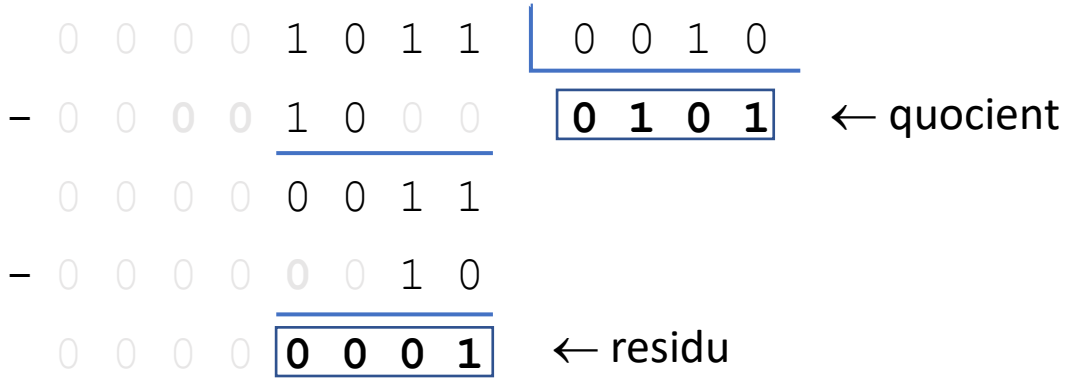
... i comparem (restem):
11 – 10 = 1

Hi cap:
1 ≥ 0

→ 1 al quocient

Divisió de naturals

- En base 2 (4 dígits): 1011 / 0010



Hardware per a un divisior de 4 bits

- Un registre R, de 8 bits per al Dividend (i Residu, al final)
  - Inicialment extendrem el dividend extès amb zeros a l'esquerra
  - I en cada pas li restarem els successius divisors: R = R – D
  - Al final contindrà el Residu

Hardware per a un divisior de 4 bits

- Un registre R, de 8 bits per al Dividend (i Residu, al final)
  - Inicialment extendrem el dividend extès amb zeros a l'esquerra
  - I en cada pas li restarem els successius divisors: R = R – D
  - Al final contindrà el Residu
- Un registre D, de 8 bits per al Divisor
  - Inicialment hi ubicarem el divisor extès amb zeros a la dreta
  - I en cada pas successiu el desplaçarem a la dreta 1 bit

Hardware per a un divisior de 4 bits

- Un registre R, de 8 bits per al Dividend (i Residu, al final)
  - Inicialment extendrem el dividend extès amb zeros a l'esquerra
  - I en cada pas li restarem els successius divisors: R = R – D
  - Al final contindrà el Residu
- Un registre D, de 8 bits per al Divisor
  - Inicialment hi ubicarem el divisor extès amb zeros a la dreta
  - I en cada pas successiu el desplaçarem a la dreta 1 bit
- Un registre Q, de 4 bits per al quocient
  - Inicialment a zero
  - En cada pas el desplaçarem a l'esquerra insertant-li un 1 o un 0

Hardware per a un divisior de 4 bits

- Un registre R, de 8 bits per al Dividend (i Residu, al final)
  - Inicialment extendrem el dividend extès amb zeros a l'esquerra
  - I en cada pas li restarem els successius divisors: R = R – D
  - Al final contindrà el Residu
- Un registre D, de 8 bits per al Divisor
  - Inicialment hi ubicarem el divisor extès amb zeros a la dreta
  - I en cada pas successiu el desplaçarem a la dreta 1 bit
- Un registre Q, de 4 bits per al quocient
  - Inicialment a zero
  - En cada pas el desplaçarem a l'esquerra insertant-li un 1 o un 0
- Un registre temporal T de 8 bits
  - Hi escrivim el resultat de la comparació (resta): T = R – D
  - Si T ≥ 0, es copia T en R, altrament es descarta

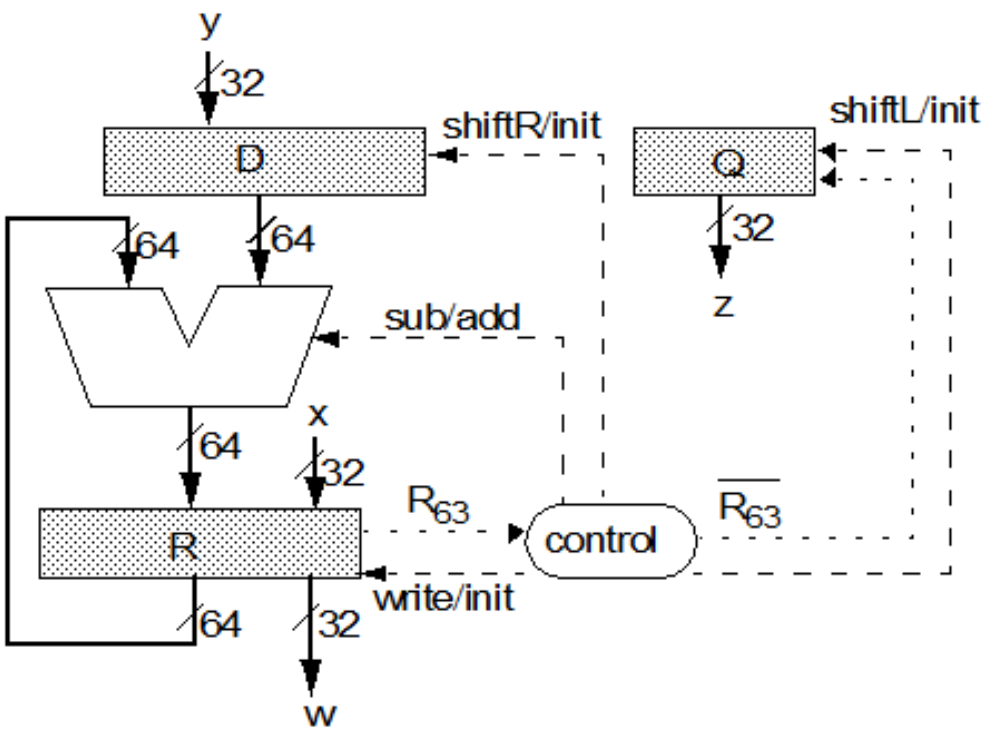
Hardware per a un divisor de 4 bits

- Un registre R, de 8 bits per al Dividend (i Residu, al final)
  - Inicialment extendrem el dividend extès amb zeros a l'esquerra
  - I en cada pas li restarem els successius divisors: R = R – D
  - Al final contindrà el Residu
- Un registre D, de 8 bits per al Divisor
  - Inicialment hi ubicarem el divisor extès amb zeros a la dreta
  - I en cada pas successiu el desplaçarem a la dreta 1 bit
- Un registre Q, de 4 bits per al quocient
  - Inicialment a zero
  - En cada pas el desplaçarem a l'esquerra insertant-li un 1 o un 0
- Un registre temporal T de 8 bits
  - Hi escrivim el resultat de la comparació (resta): T = R – D
  - Si T ≥ 0, es copia T en R, altrament es descarta
- Algorisme de divisió "amb restauració": estalvia el registre temporal T
  - Escrivim en R el resultat de la resta: R = R – D
  - Si R < 0, "restaurem" el seu valor anterior: R = R + D

Divisió de naturals: circuit

- Divisió de naturals de 32 bits "amb restauració"
  - Quocient: $z = x / y$
  - Residu: $w = x \% y$

Divisor seqüencial de naturals

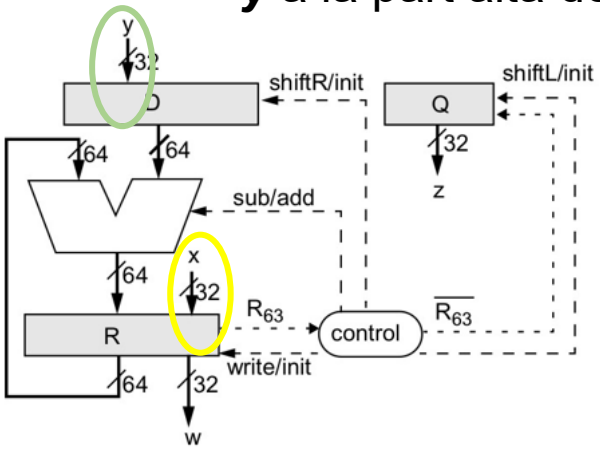


Pseudocodi

```
// Inicialització
R0:31 = x; R32:63 = 0;
D0:31 = 0; D32:63 = y;
Q  = 0;
for (i=1; i<=32; i++) {
      D = D >> 1;
      R = R - D;
      if (R63 == 0)
            Q = (Q << 1) | 1;
      else {
            R = R + D;
            Q = Q << 1;
      }
}
z = Q;
w = R0:31
```

Exemple divisió x/y: 1011 / 0010

Init: ***x*** a la part baixa del Dividend/Residu (**R**)
y a la part alta del Divisor (**D**), i zeros a la resta

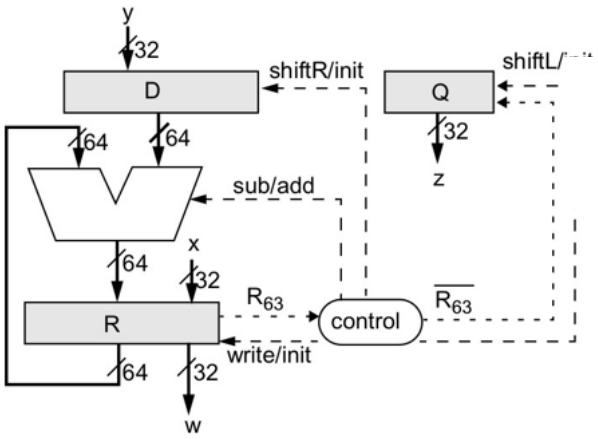



```
// Inicialització
R0:31  = x;  R32:63 = 0;
D0:31  = 0;  D32:63 = y;
Q      = 0;
```

Iter.	R (Dividend/Residu)								D (Divisor)								Q (Quocient)			
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0

Exemple divisió x/y: 1011 / 0010

Iter 1: Desplacem **D** a dreta

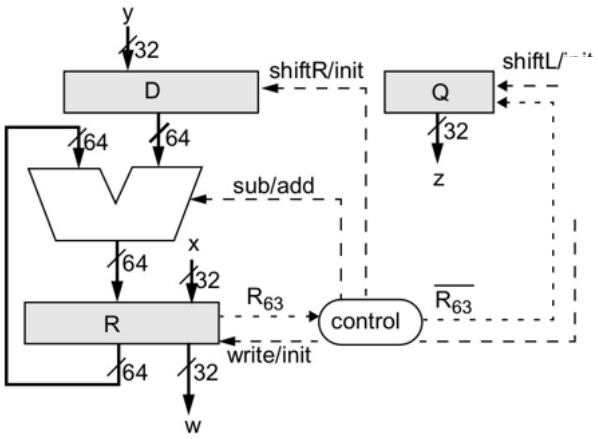



```
D = D >> 1;
R = R - D;
if (R63 == 0)
```

Iter.	R (Dividend/Residu)								D (Divisor)								Q (Quocient)			
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
1									0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0				

Exemple divisió x/y: 1011 / 0010

Iter 1: Restem **R=R-D** per comparar-los. Comprovem **R < 0**!



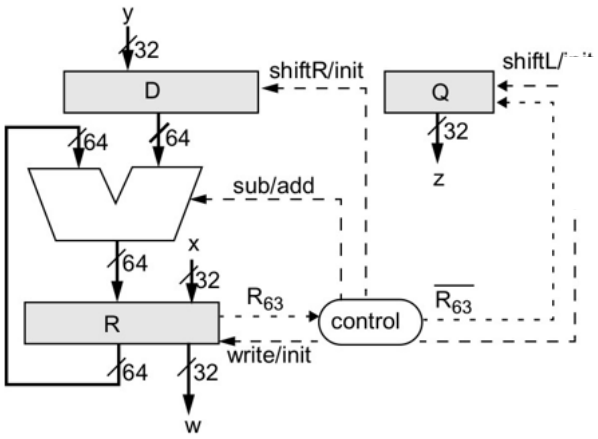

```
D = D >> 1;
R = R - D;
if (R63 == 0)
```

R	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**
– D	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0
R'	**1**	1	1	1	1	0	1	1

Iter.	R (Dividend/Residu)								D (Divisor)								Q (Quocient)			
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0				

Exemple divisió x/y: 1011 / 0010

Iter 1: **Restaurem R** sumant **R=R+D**



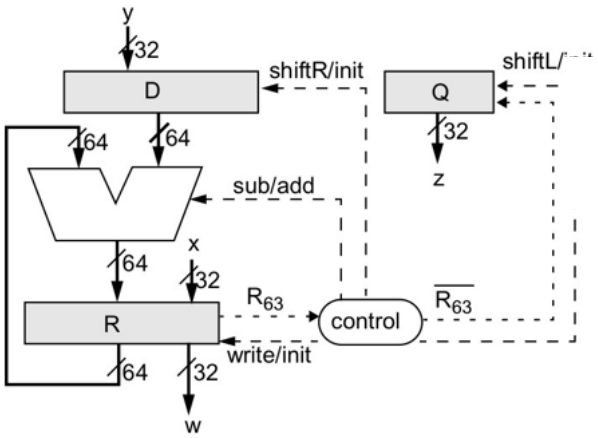

```
D = D >> 1;
R = R - D;
if (R63 == 0)
else {
        R = R + D;
        Q = Q << 1;
}
```

R	1	1	1	1	1	0	1	1
+ D	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0
R'	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**

Iter.	R (Dividend/Residu)								D (Divisor)								Q (Quocient)			
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0				

Exemple divisió x/y: 1011 / 0010

Iter 1: Insertem Q_0=0 desplaçant Q a l'esquerra



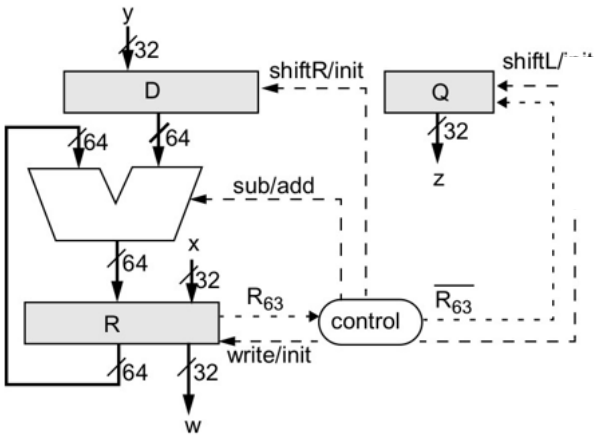

```
D = D >> 1;
R = R - D;
if (R63 == 0)

else {
        R = R + D;
        Q = Q << 1;
}
```

Iter.	R (Dividend/Residu)								D (Divisor)								Q (Quocient)			
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**0**

Exemple divisió x/y: 1011 / 0010

Iter 2: Desplacem **D** a la dreta

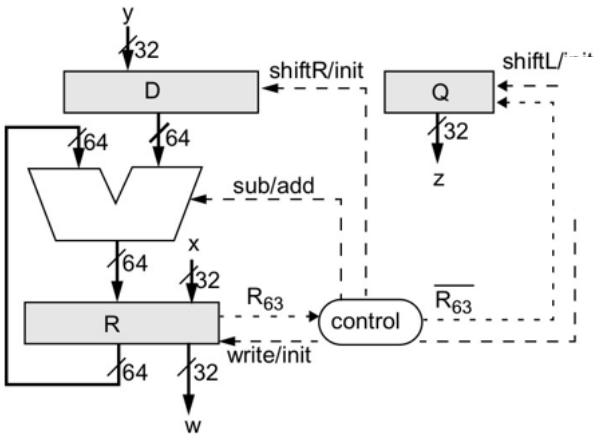



```
D = D >> 1;
R = R - D;
if (R63 == 0)
  Q = (Q << 1) | 1;
```

Iter.	R (Dividend/Residu)								D (Divisor)								Q (Quocient)			
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**0**
2									0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0				

Exemple divisió x/y: 1011 / 0010

Iter 2: Restem **R=R-D** i comprovem que **R ≥ 0**



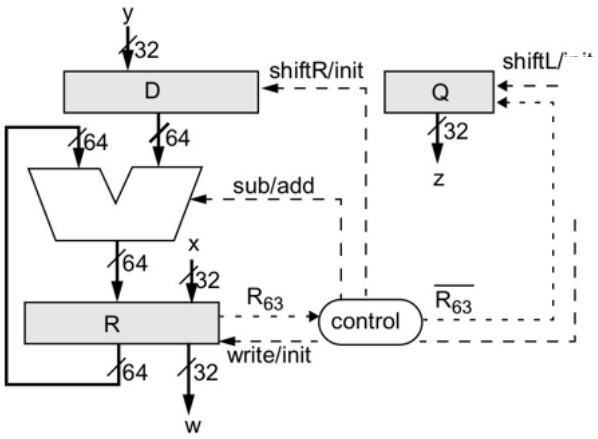

```
D = D >> 1;
R = R - D;
if (R63 == 0)
  Q = (Q << 1) | 1;
```

R	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**
– D	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0
(0)	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	

Iter.	R (Dividend/Residu)								D (Divisor)								Q (Quocient)			
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**0**
2	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0				

Exemple divisió x/y: 1011 / 0010

Iter 2: Insertem Q_0=0 desplaçant Q a l'esquerra

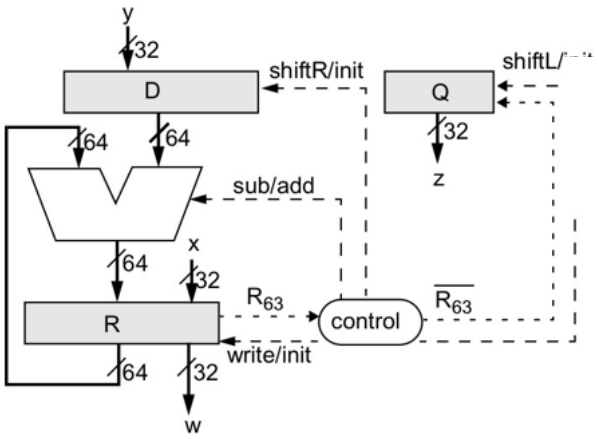



```
D = D >> 1;
R = R - D;
if (R63 == 0)
  Q = (Q << 1) | 1;
```

Iter.	R (Dividend/Residu)								D (Divisor)								Q (Quocient)			
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**0**
2	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	**0**	**1**

Exemple divisió x/y: 1011 / 0010

Iter 3: Desplacem **D** a la dreta

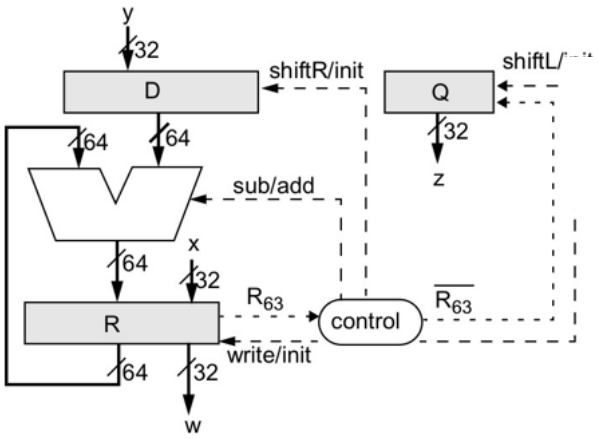



```
D = D >> 1;
R = R - D;
if (R63 == 0)
```

Iter.	R (Dividend/Residu)								D (Divisor)								Q (Quocient)			
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**0**
2	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	**0**	**1**
3									0	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0				

Exemple divisió x/y: 1011 / 0010

Iter 3: Restem **R=R-D** per comparar-los. Comprovem **R < 0**!



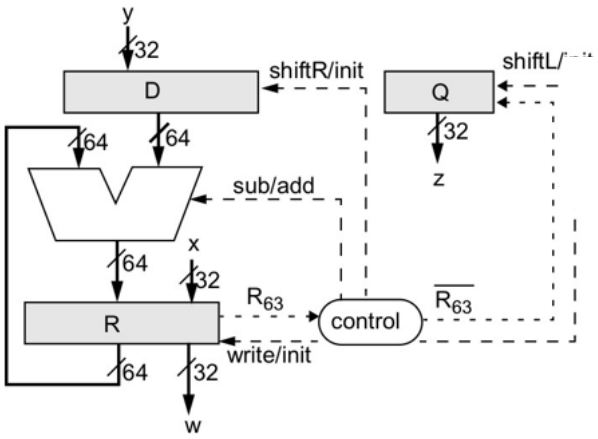

```
D = D >> 1;
R = R - D;
if (R63 == 0)
```

R	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**
− D	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0
	(1)	1	1	1	1	1	1	1

Iter.	R (Dividend/Residu)								D (Divisor)								Q (Quocient)			
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**0**
2	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	**0**	**1**
3	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0				

Exemple divisió x/y: 1011 / 0010

Iter 3: **Restaurem R** sumant **R=R+D**



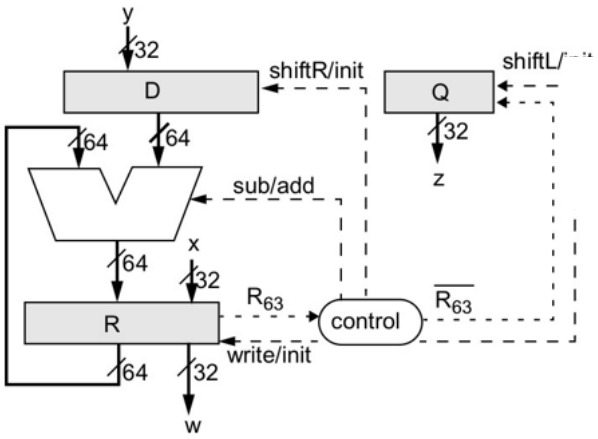

```
D = D >> 1;
R = R - D;
if (R63 == 0)
else {
        R = R + D;
        Q = Q << 1;
}
```

R	1	1	1	1	1	1	1	1
+ D	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0
	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**

Iter.	R (Dividend/Residu)								D (Divisor)								Q (Quocient)			
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**0**
2	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	**0**	**1**
3	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0				

Exemple divisió x/y: 1011 / 0010

Iter 3: Insertem Q_0=0 desplaçant Q a l'esquerra



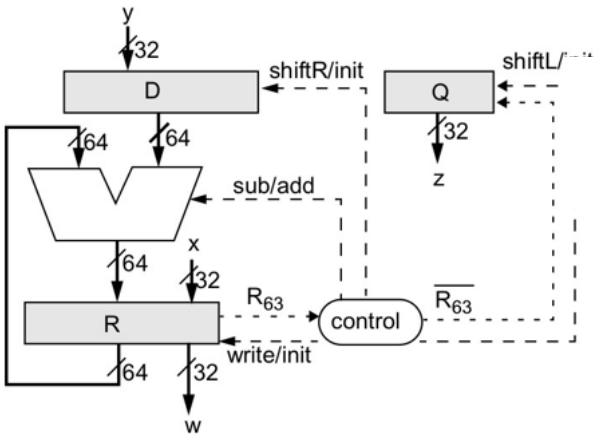

```
D = D >> 1;
R = R - D;
if (R63 == 0)

else {
        R = R + D;
        Q = Q << 1;
}
```

Iter.	R (Dividend/Residu)								D (Divisor)								Q (Quocient)			
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**0**
2	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	**0**	**1**
3	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	**0**	**1**	**0**

Exemple divisió x/y: 1011 / 0010

Iter 4: Desplacem **D** a la dreta

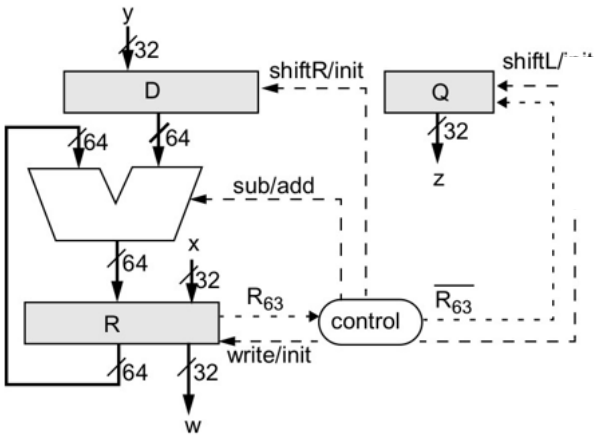



```
D = D >> 1;
R = R - D;
if (R63 == 0)
  Q = (Q << 1) | 1;
```

Iter.	R (Dividend/Residu)								D (Divisor)								Q (Quocient)			
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**0**
2	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	**0**	**1**
3	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	**0**	**1**	**0**
4									0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**				

Exemple divisió x/y: 1011 / 0010

Iter 4: Restem **R=R-D** i comprovem que **R ≥ 0**



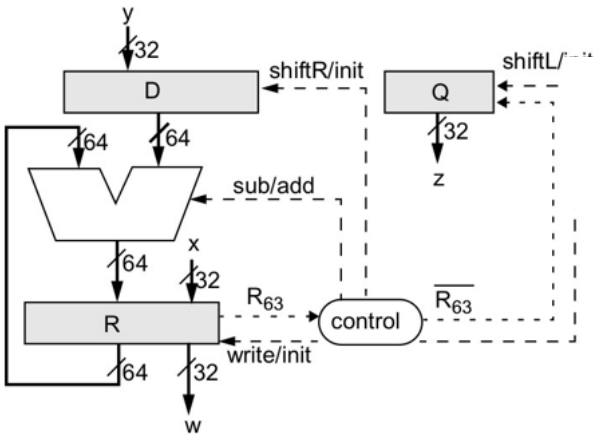

```
D = D >> 1;
R = R - D;
if (R63 == 0)
  Q = (Q << 1) | 1;
```

R	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**
– D	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**
(0)	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

Iter.	R (Dividend/Residu)								D (Divisor)								Q (Quocient)			
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**0**
2	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	**0**	**1**
3	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	**0**	**1**	**0**
4	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**1**	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**				

Exemple divisió x/y: 1011 / 0010

Iter 4: Insertem Q_0=1 desplaçant Q a l'esquerra




```
D = D >> 1;
R = R - D;
if (R63 == 0)
  Q = (Q << 1) | 1;
```

Iter.	R (Dividend/Residu)								D (Divisor)								Q (Quocient)			
Init	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	0	0	**0**
2	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	0	0	**0**	**1**
3	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	0	0	**0**	**1**	**0**
4	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**1**	0	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**

Divisió d'enters: *x/y*

Si y ≠ 0:

1. Calcular valors absoluts del operands: |*x*|, |*y*|

Divisió d'enters: *x/y*

Si y ≠ 0:

1. Calcular valors absoluts del operands: |*x*|, |*y*|
2. Dividir els valors absoluts (divisió de naturals)
   - Obtenim quocient i residu

Divisió d'enters: *x/y*

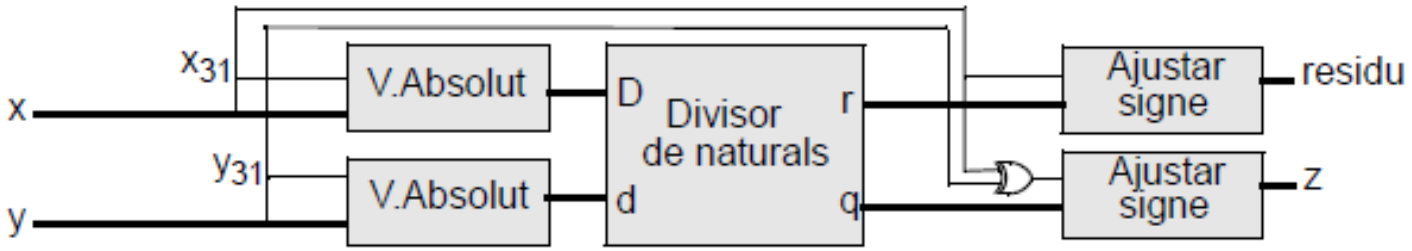
Si y ≠ 0:

1. Calcular valors absoluts del operands: |*x*|, |*y*|
2. Dividir els valors absoluts (divisió de naturals)
   - Obtenim quocient i residu
3. Ajustar signes
   - Canviar signe del quocient si x, y de diferent signe
   - Canviar signe del residu si el dividend és negatiu

Divisió d'enters: *x/y*

Si y ≠ 0:

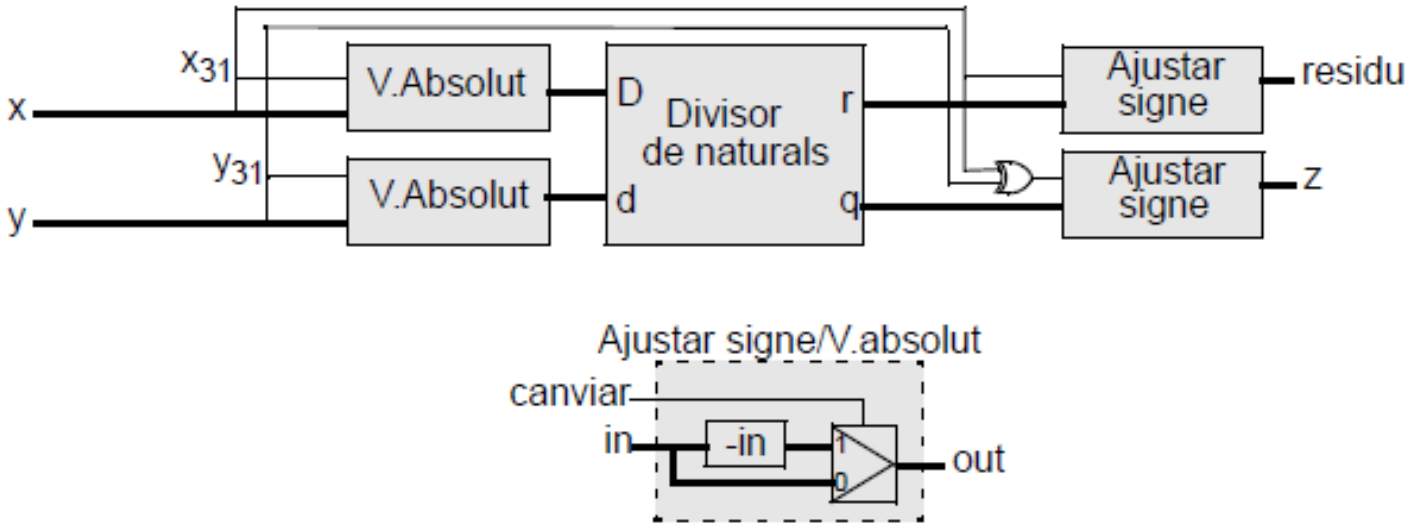
1. Calcular valors absoluts del operands: |*x*|, |*y*|
2. Dividir els valors absoluts (divisió de naturals)
   - Obtenim quocient i residu
3. Ajustar signes
   - Canviar signe del quocient si x, y de diferent signe
   - Canviar signe del residu si el dividend és negatiu



Divisió d'enters: *x/y*

Si y ≠ 0:

1. Calcular valors absoluts del operands: |*x*|, |*y*|
2. Dividir els valors absoluts (divisió de naturals)
   - Obtenim quocient i residu
3. Ajustar signes
   - Canviar signe del quocient si x, y de diferent signe
   - Canviar signe del residu si el dividend és negatiu



Divisió d'enters i naturals

- Instruccions MIPS

```
divu   rs, rt        # Naturals
div    rs, rt        # Enters
```

Divisió d'enters i naturals

- Instruccions MIPS

```
divu   rs, rt        # Naturals
div    rs, rt        # Enters
```

- Operació

$lo ← rs / rt (quocient)

$hi ← rs % rt (residu)

Divisió d'enters i naturals

- Instruccions MIPS

```
divu   rs, rt        # Naturals
div    rs, rt        # Enters
```

- Operació

  $lo ← rs / rt (quocient)
  $hi ← rs % rt (residu)

- Si el divisor és 0
  - El resultat és *indefinit*

Divisió d'enters i naturals

- Instruccions MIPS

```
divu   rs, rt        # Naturals
div    rs, rt        # Enters
```

- Operació

  $lo ← rs / rt (quocient)
  $hi ← rs % rt (residu)

- Si el divisor és 0
  - El resultat és *indefinit*
- Overflow
  - Naturals: no n'hi ha
  - Enters: només hi ha un cas. Quin és?

Divisió d'enters i naturals

- Instruccions MIPS

```
divu   rs, rt        # Naturals
div    rs, rt        # Enters
```

- Operació

  $lo ← rs / rt (quocient)
  $hi ← rs % rt (residu)

- Si el divisor és 0
  - El resultat és *indefinit*
- Overflow
  - Naturals: no n'hi ha
  - Enters: només hi ha un cas. Quin és?

$$\frac{-2^{31}}{-1} = 2^{31} \rightarrow \text{No representable en Ca2!}$$

Divisió per potències de 2

- **Algunes** divisions per potències de 2
  - Es poden traduir per un shift, molt més ràpid que una divisió

Divisió per potències de 2

- **Algunes** divisions per potències de 2
  - Es poden traduir per un shift, molt més ràpid que una divisió
- Per a naturals
  - `srl` i `divu` calculen el mateix quocient

Divisió per potències de 2

- **Algunes** divisions per potències de 2
  - Es poden traduir per un shift, molt més ràpid que una divisió
- Per a naturals
  - `srl` i `divu` calculen el mateix quocient
- Per a enters
  - Si el dividend és positiu, `sra` i `div` calculen el mateix quocient
  - Però atenció! Si el dividend és negatiu i la divisió no és exacta, `sra` i `div` donen resultats diferents

Divisió per potències de 2

- **Algunes** divisions per potències de 2
  - Es poden traduir per un shift, molt més ràpid que una divisió
- Per a naturals
  - `srl` i `divu` calculen el mateix quocient
- Per a enters
  - Si el dividend és positiu, `sra` i `div` calculen el mateix quocient
  - Però atenció! Si el dividend és negatiu i la divisió no és exacta, `sra` i `div` donen resultats diferents
- En conclusió
  - Traduirem operadors C de divisió (/) i mòdul (%) amb `div` i `divu`
  - Només optimitzarem amb `sra` si el resultat és equivalent a `div`

Aritmètica de coma flotant

- Introducció
- Estàndard IEEE-754: Format
- Rang, precisió i arrodoniment
- Codificacions especials, underflow i nombres denormals
- Conversions entre base 10 i base 2
- Operacions: suma, resta, bits de guarda, multiplicació i divisió
- Coma flotant en MIPS
- Associativitat de la suma

Coma fixa

- Com representarem nombres fraccionaris?
  - Necessaris per a la física, l'enginyeria, etc.

Coma fixa

- Com representarem nombres fraccionaris?
  - Necessaris per a la física, l'enginyeria, etc.

- En *coma fixa*
  - Alguns bits per a la part entera, i alguns per a la part fraccionària
  - Exemple amb 8 bits:

    `eeeeefff` → part entera i part fraccionària

Coma fixa

- Com representarem nombres fraccionaris?
  - Necessaris per a la física, l'enginyeria, etc.

- En *coma fixa*
  - Alguns bits per a la part entera, i alguns per a la part fraccionària
  - Exemple amb 8 bits:

    eeeeefff → part entera i part fraccionària

    10101,110 =

    $= 1\times2^4 + 0\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 + 1\times2^{-1} + 1\times2^{-2} + 0\times2^{-3}$

    = 21,7510

Coma fixa

- Com representarem nombres fraccionaris?
  - Necessaris per a la física, l'enginyeria, etc.

- En *coma fixa*
  - Alguns bits per a la part entera, i alguns per a la part fraccionària
  - Exemple amb 8 bits:

    eeeeefff → part entera i part fraccionària

    10101,110 =

    $= 1\times2^4 + 0\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 + 1\times2^{-1} + 1\times2^{-2} + 0\times2^{-3}$

    $= 21{,}7510$

  - El rang és bastant limitat
  - Els números representables són equidistants

Coma flotant

- En coma flotant (base 10)
  - També coneguda com *notació exponencial o científica*

$$v = \pm\ m \times 10^{e}$$ *m = mantissa, e = exponent*

Coma flotant

- En coma flotant (base 10)
  - També coneguda com *notació exponencial o científica*

    $v = \pm\ m \times 10^{e}$ *m = mantissa, e = exponent*
  - Rang molt més gran que la coma fixa
  - Però números representables no-equidistants

Coma flotant

- En coma flotant (base 10)
  - També coneguda com *notació exponencial o científica*

    $v = \pm\ m \times 10^e$ *m = mantissa, e = exponent*
  - Rang molt més gran que la coma fixa
  - Però números representables no-equidistants

- Notació científica *normalitzada* (base 10)

  $v = \pm\ m \times 10^e$ tal que $1 \leq m < 10$

  - És a dir: la part entera de m ha de tenir 1 sol dígit, i ha de ser no-nul

Coma flotant

- En coma flotant (base 10)
  - També coneguda com *notació exponencial o científica*

    $v = \pm\ m \times 10^e$ *m = mantissa, e = exponent*
  - Rang molt més gran que la coma fixa
  - Però números representables no-equidistants

- Notació científica *normalitzada* (base 10)

  $v = \pm\ m \times 10^e$ tal que $1 \leq m < 10$

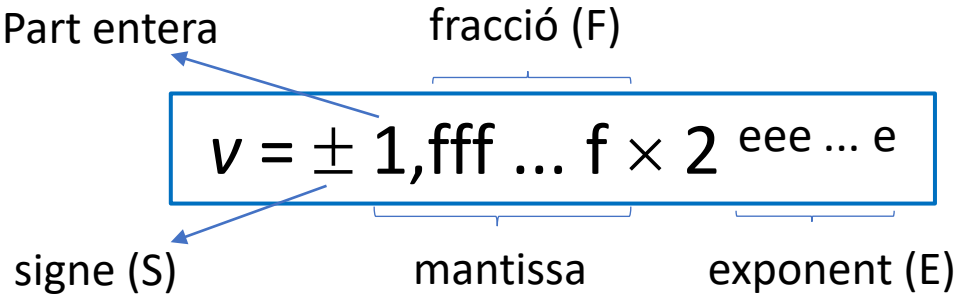
  - És a dir: la part entera de m ha de tenir 1 sol dígit, i ha de ser no-nul
  - Exemples

    2.34×10^6 → Normalitzat

    0.0234×10^8 → No normalitzat!

Coma flotant en base 2

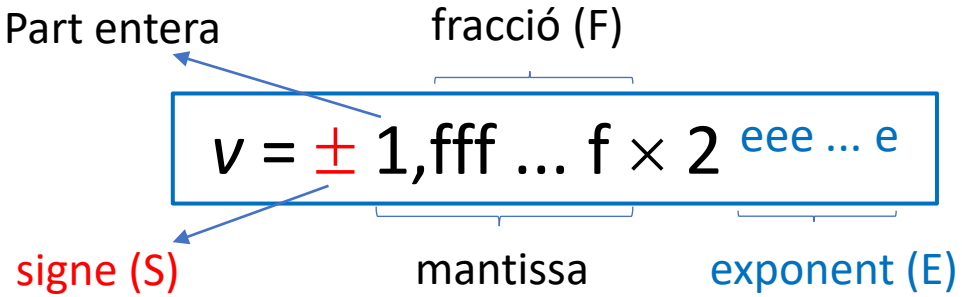
- Coma flotant en base 2



  - En forma més compacta: $v = (-1)^s \times (1 + 0,F) \times 2^E$

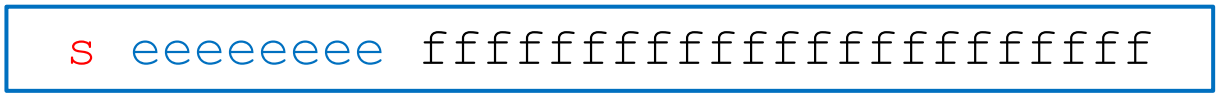
Coma flotant en base 2

- Coma flotant en base 2



  - En forma més compacta: $v = (-1)^s \times (1 + 0,F) \times 2^E$

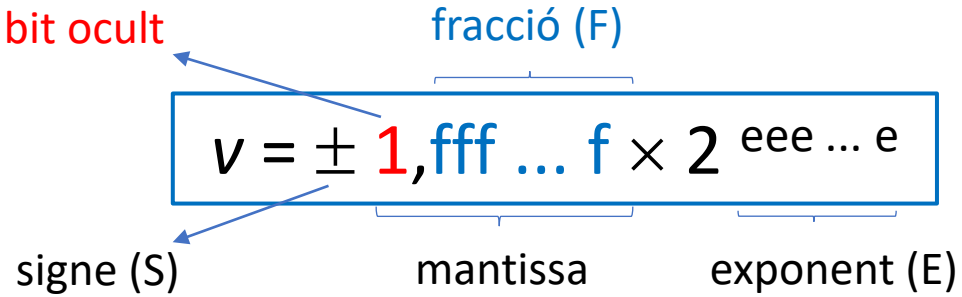
- Format: **s**igne, **e**xponent, **f**racció



  - Signe: 0=positiu, 1=negatiu
  - Exponent: enter representat “en excés”

Coma flotant en base 2

- Coma flotant en base 2



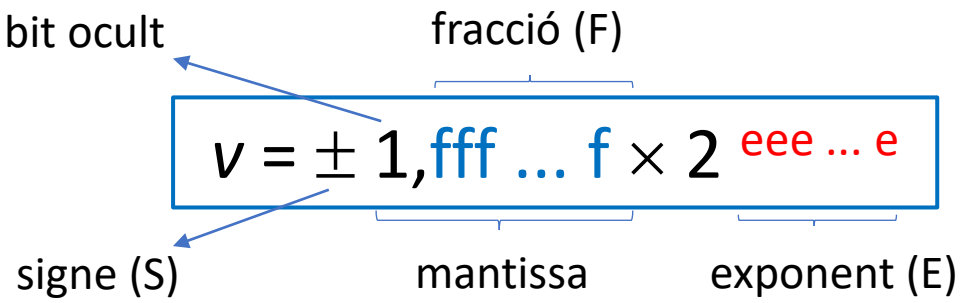
  - En forma més compacta: $v = (-1)^s \times (1 + 0,F) \times 2^E$

- Format: **s**igne, **e**xponent, **f**racció

```
s eeeeeeee fffffffffffffffffffffff
```

  - Signe: 0=positiu, 1=negatiu
  - Exponent: enter representat “en excés”
  - Mantissa: normalitzada
    → La part entera val 1, és implícita i no es codifica (“bit ocult”)
    → Sols es codifica la fracció

Coma flotant en base 2



- El format és un compromís

```
s eeeeeeee fffffffffffffffffffffff
```

  - Si dedica + bits a exponent → major rang
  - Si dedica + bits a fracció → major precisió

Aritmètica de coma flotant

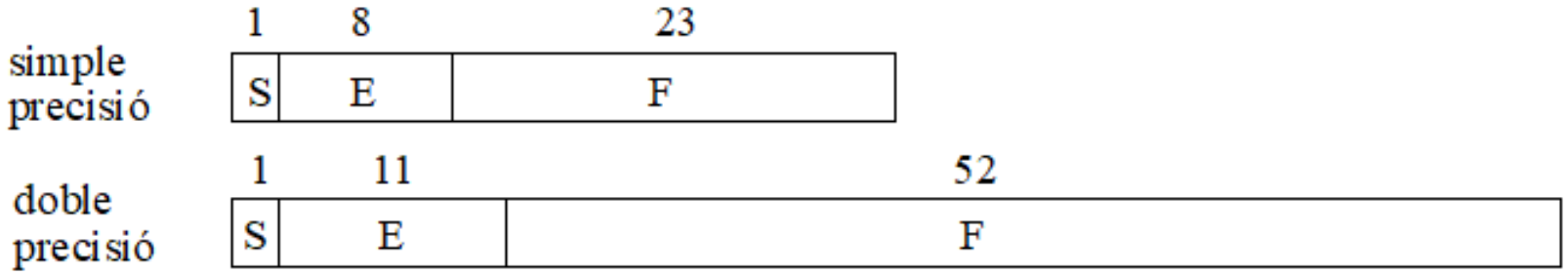
- Introducció
- Estàndard IEEE-754: Format
- Rang, precisió i arrodoniment
- Codificacions especials, underflow i nombres denormals
- Conversions entre base 10 i base 2
- Operacions: suma, resta, bits de guarda, multiplicació i divisió
- Coma flotant en MIPS
- Associativitat de la suma

Estàndard IEEE-754 (1985-2019)

- El IEEE-754
  - Estàndard de coma flotant nascut el 1985
  - Necessitat d'intercanviar dades entre diferents sistemes (abans cada fabricant tenia el seu format)
  - Regula representació, operacions, arrodoniment i excepcions
  - Es va renovant cada cert temps, darrerament el 2008 i 2019

Estàndard IEEE-754 (1985-2019)

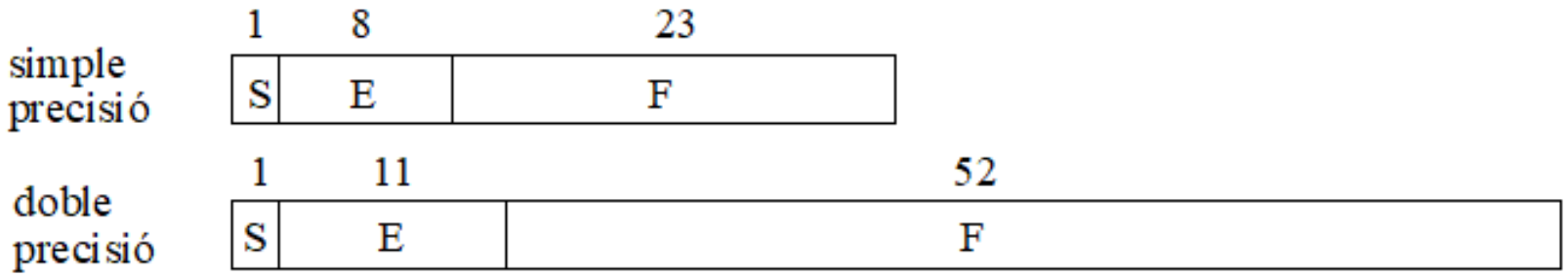
- Dos formats principals



- En C

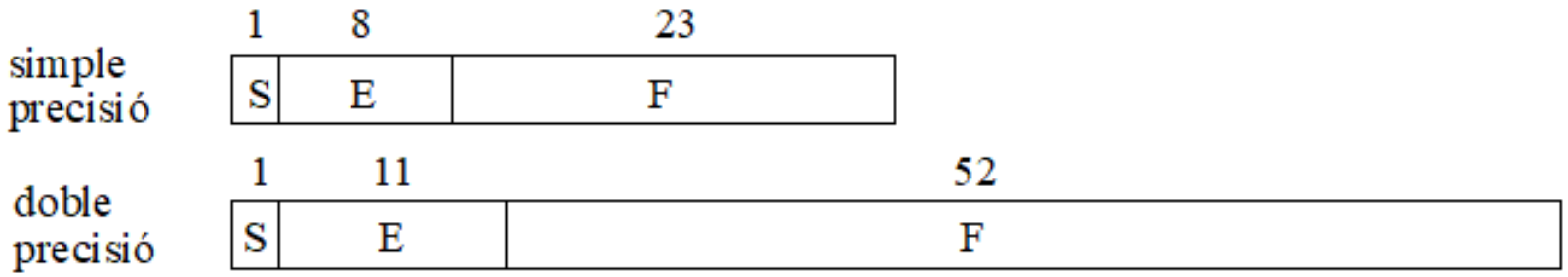
```
float x;          // simple precisió (4 bytes)
double y;         // doble precisió (8 bytes)
```

Estàndard IEEE-754 (1985-2019)



- Signe: 1 bit
- Exponent: 8 bits / 11 bits
  - Codificat en excés a 127 / 1023
  - Permet comparar magnituds amb un comparador de naturals

Estàndard IEEE-754 (1985-2019)



- Signe: 1 bit
- Exponent: 8 bits / 11 bits
  - Codificat en excés a 127 / 1023
  - Permet comparar magnituds amb un comparador de naturals
- Fracció: 23 bits / 52 bits
  - Part fraccionària de la mantissa
- Part entera = 1
  - *bit ocult* implícit, no es representa

Aritmètica de coma flotant

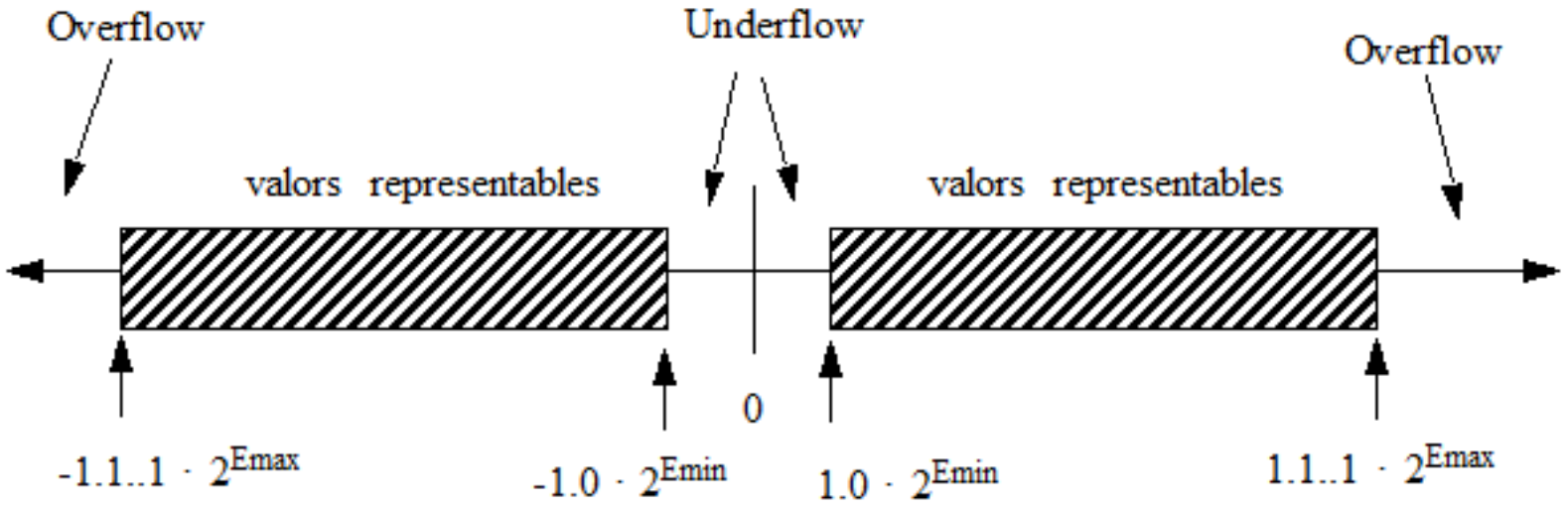
- Introducció
- Estàndard IEEE-754: Format
- Rang, precisió i arrodoniment
- Codificacions especials, underflow i nombres denormals
- Conversions entre base 10 i base 2
- Operacions: suma, resta, bits de guarda, multiplicació i divisió
- Coma flotant en MIPS
- Associativitat de la suma

IEEE-754: Valors representables

- Mantissa: $1,000...0 \leq \text{mantissa} \leq 1,111...1$

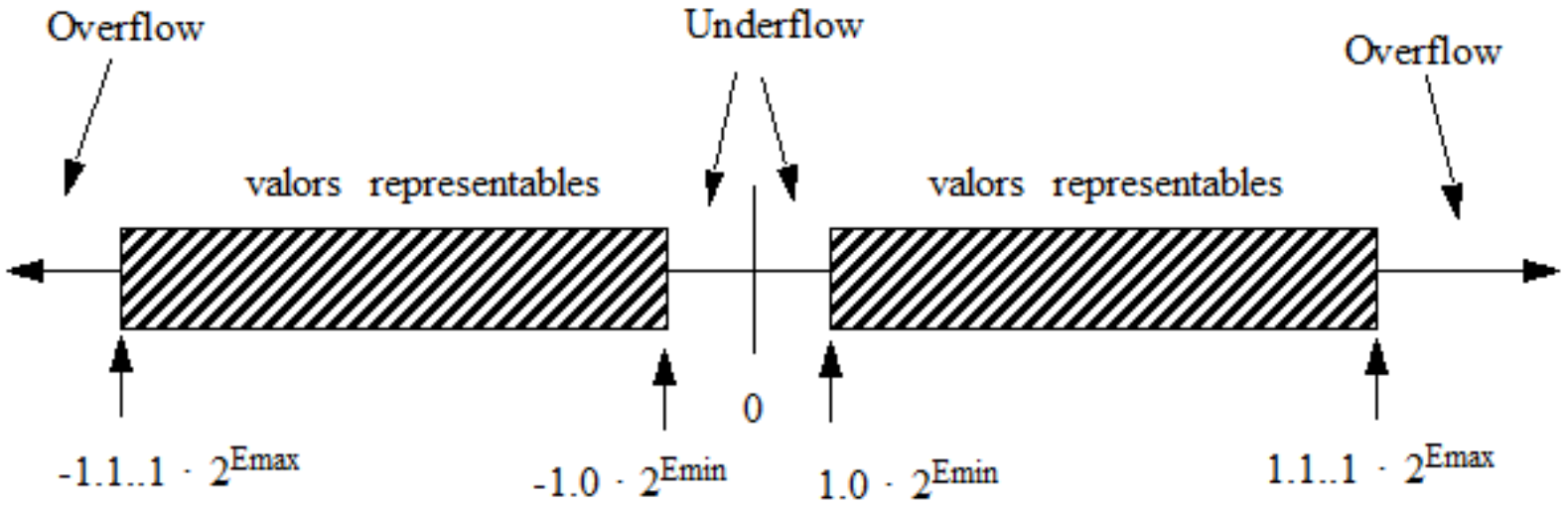
IEEE-754: Valors representables

- Mantissa: `1,000...0` ≤ mantissa ≤ `1,111...1`
- Exponent: Emin ≤ E ≤ Emax
- Resultats fora de rang (Overflow): E > Emax



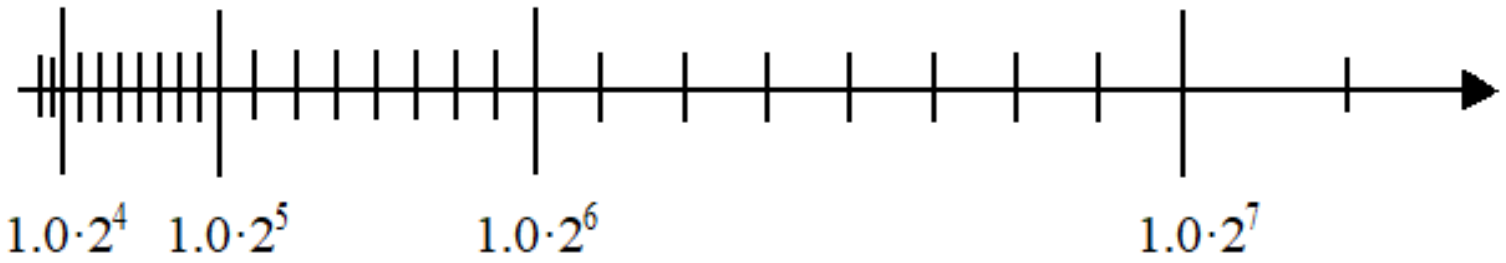
IEEE-754: Valors representables

- Mantissa: `1,000...0` ≤ mantissa ≤ `1,111...1`
- Exponent: Emin ≤ E ≤ Emax
- Resultats fora de rang (Overflow): E > Emax
- Resultats “no fiables” (Underflow): *magnitud* < $1{,}0 \cdot 2^{Emin}$

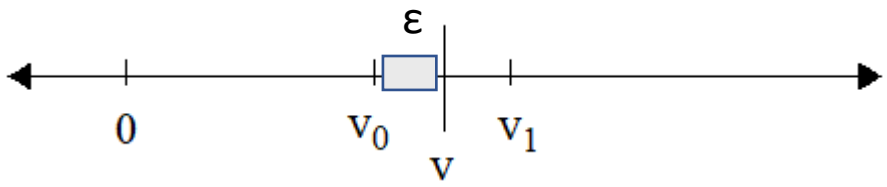


IEEE-754: Valors representables

- Valors representables no equidistants
  - Amb 32 bits es poden representar 2^{32} números, igual que amb coma fixa, però no són equidistants:

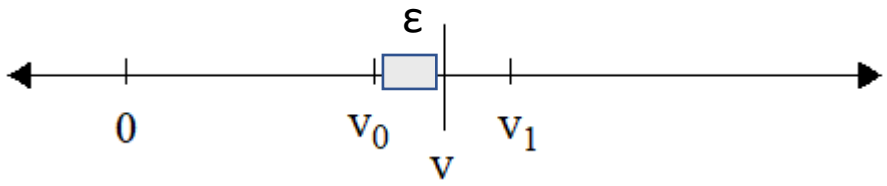


Error de precisió per arrodoniment



- Resultat exacte v està entre 2 valors representables: v_0 i v_1
- Si l'arrodonim a v_0 l'error de precisió és $\varepsilon = |v - v_0|$

Error de precisió per arrodoniment

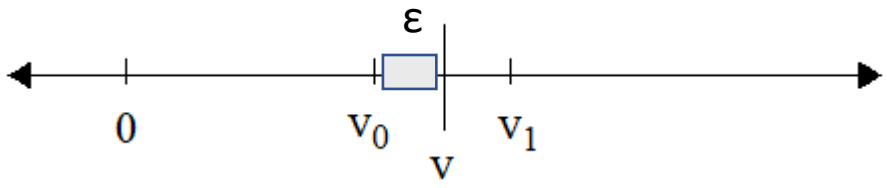


- Resultat exacte v està entre 2 valors representables: v_0 i v_1
- Si l'arrodonim a v_0 l'error de precisió és $\varepsilon = |v - v_0|$
- Exemple: representar el racional $\frac{1}{10}$ en simple precisió
  - És el número amb fracció periòdica:

$$v = 1,10011001100110011001100\,11001100110011\ldots \times 2^{-4}$$

23 bits de fracció

Error de precisió per arrodoniment



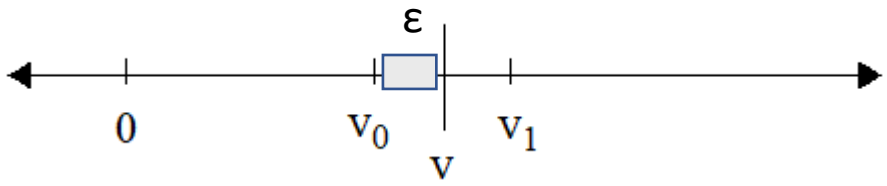
- Resultat exacte v està entre 2 valors representables: v_0 i v_1
- Si l'arrodonim a v_0 l'error de precisió és $\varepsilon = |v - v_0|$
- Exemple: representar el racional $\frac{1}{10}$ en simple precisió
  - És el número amb fracció periòdica:

    $\mathbf{v} = 1,10011001100110011001100\ 1100110011001100110011\ldots \times 2^{-4}$

    23 bits de fracció
  - Si l'arrodonim a v_0 (eliminant bits)

    $\mathbf{v_0} = 1,10011001100110011001100 \times 2^{-4}$

Error de precisió per arrodoniment



- Resultat exacte v està entre 2 valors representables: v_0 i v_1
- Si l'arrodonim a v_0 l'error de precisió és $\varepsilon = |v - v_0|$
- Exemple: representar el racional $\frac{1}{10}$ en simple precisió
  - És el número amb fracció periòdica:

    $v = 1,10011001100110011001100\,11001100110011\ldots \times 2^{-4}$

    23 bits de fracció
  - Si l'arrodonim a v_0 (eliminant bits)

    $v_0 = 1,10011001100110011001100 \times 2^{-4}$
  - Error de precisió ($\varepsilon = |v - v_0|$)

    $\varepsilon = 0,00000000000000000000000\,11001100110011\ldots \times 2^{-4}$

Error de precisió per arrodoniment

- Fita superior de l'error absolut en l'interval (v_0, v_1)

$$\varepsilon < \varepsilon_{max} = |v_1 - v_0|$$

Error de precisió per arrodoniment

- Fita superior de l'error absolut en l'interval (v_0, v_1)

$$\varepsilon < \varepsilon_{max} = |v_1 - v_0|$$

- Fita superior de l'error absolut en simple precisió

$$v_0 = m \cdot 2^E$$

$$v_1 = (m + 2^{-23}) \cdot 2^E$$

$$\varepsilon < \varepsilon_{max} = (m + 2^{-23} - m) \cdot 2^E = 2^{E-23}$$

Error de precisió per arrodoniment

- Error relatiu

$$\eta = \frac{\varepsilon}{|v|}$$

  - Pot ser més significatiu que l'absolut
  - Un error ε = 1m és petit per a la distància Terra-Sol...
    ... però inacceptable per a la longitud d'un pont

Error de precisió per arrodoniment

- Error relatiu

$$\eta = \frac{\varepsilon}{|v|}$$

  - Pot ser més significatiu que l'absolut
  - Un error ε = 1m és petit per a la distància Terra-Sol...
    ... però inacceptable per a la longitud d'un pont

- Fita superior de l'error relatiu en simple precisió

$$\eta < \eta_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{|v_0|} = \frac{2^{E-23}}{m \cdot 2^E} = \frac{2^{-23}}{m}$$

Error de precisió per arrodoniment

- Error relatiu

$$\eta = \frac{\varepsilon}{|v|}$$

  - Pot ser més significatiu que l'absolut
  - Un error ε = 1m és petit per a la distància Terra-Sol...
    ... però inacceptable per a la longitud d'un pont

- Fita superior de l'error relatiu en simple precisió

$$\eta < \eta_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{|v_0|} = \frac{2^{E-23}}{m \cdot 2^E} = \frac{2^{-23}}{m}$$

  - I com que m ≥ 1,0 queda

$$\eta < \eta_{max} < 2^{-23} = 1 \text{ ULP}$$

  - 1 ULP = 0,00000000000000000000001 ("Unit in the Last Place")

Error de precisió i "Underflow"

- Hi ha un cas especial, quan un resultat és $|v| < 2^{Emin}$
  - Està en l'interval $|v| \in (0, 2^{Emin})$

Error de precisió i "Underflow"

- Hi ha un cas especial, quan un resultat és $|v| < 2^{Emin}$
  - Està en l'interval $|v| \in (0, 2^{Emin})$
  - Si l'arrodonim fent $v=v_0$, l'error absolut és

    $\varepsilon = |v - v_0| = |v - 0| = |v|$
  - I l'error relatiu és

$$\eta = \frac{\varepsilon}{|v|} = \frac{|v|}{|v|} = 1$$

Error de precisió i "Underflow"

- Hi ha un cas especial, quan un resultat és $|v| < 2^{Emin}$
  - Està en l'interval $|v| \in (0, 2^{Emin})$
  - Si l'arrodonim fent $v=v_0$, l'error absolut és

    $\varepsilon = |v - v_0| = |v - 0| = |v|$
  - I l'error relatiu és

    $$\eta = \frac{\varepsilon}{|v|} = \frac{|v|}{|v|} = 1$$
- L'error és tan gran com el resultat!
  - No és fiable
  - L'estàndard determina que es produeix un "underflow"

Error de precisió i "Underflow"

- Hi ha un cas especial, quan un resultat és $|v| < 2^{Emin}$
  - Està en l'interval $|v| \in (0, 2^{Emin})$
  - Si l'arrodonim fent $v=v_0$, l'error absolut és

    $\varepsilon = |v - v_0| = |v - 0| = |v|$
  - I l'error relatiu és

    $$\eta = \frac{\varepsilon}{|v|} = \frac{|v|}{|v|} = 1$$
- L'error és tan gran com el resultat!
  - No és fiable
  - L'estàndard determina que es produeix un "underflow"
  - El tractament és configurable: arrodonir a zero, excepció, etc.

IEEE-754: 4 modes d'arrodoniment

1. Truncament ("cap al zero") $\rightarrow$ $v = v_0$
   - El més simple d'implementar, sols cal eliminar els bits extra

IEEE-754: 4 modes d'arrodoniment

1. Truncament ("cap al zero") $\rightarrow$ $v = v_0$
   - El més simple d'implementar, sols cal eliminar els bits extra
   - Fita superior d'error, en simple precisió

     $\varepsilon < \varepsilon_{max} = |v_1 - v_0|$

     $\varepsilon < \varepsilon_{max} = 2^{E-23}$ $\quad \eta < \eta_{max} < 2^{-23}$ = 1 ULP

IEEE-754: 4 modes d'arrodoniment

1. Truncament ("cap al zero") $\rightarrow$ $v = v_0$
   - El més simple d'implementar, sols cal eliminar els bits extra
   - Fita superior d'error, en simple precisió

     $\varepsilon < \varepsilon_{max} = |v_1 - v_0|$

     $\varepsilon < \varepsilon_{max} = 2^{E-23}$ $\qquad \eta < \eta_{max} < 2^{-23}$ = 1 ULP

2. Cap al +∞ $\rightarrow$ $v = max(v_0, v_1)$
3. Cap al - ∞ $\rightarrow$ $v = min(v_0, v_1)$
   - Usats en "aritmètica d'intervals"

IEEE-754: 4 modes d'arrodoniment

1. Truncament ("cap al zero") → $v = v_0$
   - El més simple d'implementar, sols cal eliminar els bits extra
   - Fita superior d'error, en simple precisió

     $\varepsilon < \varepsilon_{max} = |v_1 - v_0|$

     $\varepsilon < \varepsilon_{max} = 2^{E-23}$ $\quad \eta < \eta_{max} < 2^{-23}$ = 1 ULP

2. Cap al +∞ → $v=max(v_0,v_1)$
3. Cap al - ∞ → $v=min(v_0,v_1)$
   - Usats en "aritmètica d'intervals"
4. Cap al més pròxim (o al valor "parell", si equidistant)
   - Mètode usat per defecte, perquè dona el menor error possible

IEEE-754: 4 modes d'arrodoniment

1. Truncament ("cap al zero") $\rightarrow$ $v = v_0$
   - El més simple d'implementar, sols cal eliminar els bits extra
   - Fita superior d'error, en simple precisió

     $\varepsilon < \varepsilon_{max} = |v_1 - v_0|$

     $\varepsilon < \varepsilon_{max} = 2^{E-23}$ $\qquad \eta < \eta_{max} < 2^{-23}$ = 1 ULP

2. Cap al +∞ $\rightarrow$ $v = max(v_0, v_1)$

3. Cap al - ∞ $\rightarrow$ $v = min(v_0, v_1)$
   - Usats en "aritmètica d'intervals"

4. Cap al més pròxim (o al valor "parell", si equidistant)
   - Mètode usat per defecte, perquè dona el menor error possible
   - Fita superior d'error: quan v és equidistant de v_0 i v_1

     $\varepsilon < \varepsilon_{max} = |v_1 - v_0|/2$

     $\varepsilon < \varepsilon_{max} = 2^{E-24}$ $\qquad \eta < \eta_{max} < 2^{-24}$ = 0,5 ULP

IEEE-754: Arrodoniment al més pròxim

- Regla pràctica per arrodonir al més pròxim
  - Calculem el resultat amb alguns bits extra de precisió:

$$v = 1,\boxed{xxxxxx...0011}\ 0000101... \times 2^{E}$$

bits del format bits extra

IEEE-754: Arrodoniment al més pròxim

- Regla pràctica per arrodonir al més pròxim
  - Calculem el resultat amb alguns bits extra de precisió
  - Examinem el primer bit extra de la mantissa en diversos casos:

    a) El bit és **0**: arrodonim a **l'anterior** (v_0)

    $v = 1,xxxxxx...0011\ \boxed{0}000101...$

    $\mathbf{v_0 = 1,xxxxxx...0011}$

IEEE-754: Arrodoniment al més pròxim

- Regla pràctica per arrodonir al més pròxim
  - Calculem el resultat amb alguns bits extra de precisió
  - Examinem el primer bit extra de la mantissa en diversos casos:

a) El bit és **0**: arrodonim a **l'anterior** (v_0)

```
v   = 1,xxxxxx...0011 0000101...
v0  = 1,xxxxxx...0011
```

b) El bit és **1**, i la resta NO són tots zeros: arrodonim al **següent** (v_1)

```
v   = 1,xxxxxx...0011 1010001...
    + 0,000000...0001
v1  = 1,xxxxxx...0100
```

IEEE-754: Arrodoniment al més pròxim

- Regla pràctica per arrodonir al més pròxim
  - Calculem el resultat amb alguns bits extra de precisió
  - Examinem el primer bit extra de la mantissa en diversos casos:

a) El bit és **0**: arrodonim a **l'anterior** (v_0)

$$v = 1,xxxxxx...0011\ \boxed{0}000101...$$

$$\mathbf{v_0 = 1,xxxxxx...0011}$$

b) El bit és **1**, i la resta NO són tots zeros: arrodonim al **següent** (v_1)

$$v = 1,xxxxxx...0011\ \boxed{1}010001...$$

$$+\ 0,000000...0001$$

$$\mathbf{v_1 = 1,xxxxxx...0100}$$

c) El bit és **1**, i la resta TOTS zeros

$$v = 1,xxxxxx...0011\ \boxed{1}000000...$$

v és **equidistant** de v_0 i v_1

$$v_0 = 1,xxxxxx...0011$$

$$v_1 = 1,xxxxxx...0100$$

IEEE-754: Arrodoniment al més pròxim

- Regla pràctica per arrodonir al més pròxim
  - Calculem el resultat amb alguns bits extra de precisió
  - Examinem el primer bit extra de la mantissa en diversos casos:

a) El bit és **0**: arrodonim a **l'anterior** (v_0)

$$v = 1,xxxxxx...0011\ \boxed{0}000101...$$

$$\mathbf{v_0 = 1,xxxxxx...0011}$$

b) El bit és **1**, i la resta NO són tots zeros: arrodonim al **següent** (v_1)

$$v = 1,xxxxxx...0011\ \boxed{1}010001...$$

$$+\ 0,000000...0001$$

$$\mathbf{v_1 = 1,xxxxxx...0100}$$

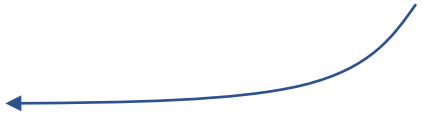
c) El bit és **1**, i la resta TOTS zeros

$$v = 1,xxxxxx...0011\ \boxed{1}000000...$$

v és **equidistant** de v_0 i v_1: arrodonim al que sigui **parell**

$$v_0 = 1,xxxxxx...001\boxed{1}$$

$$\mathbf{v_1 = 1,xxxxxx...010\boxed{0}}$$



Aritmètica de coma flotant

- Introducció
- Estàndard IEEE-754: Format
- Rang, precisió i arrodoniment
- Codificacions especials, underflow i nombres denormals
- Conversions entre base 10 i base 2
- Operacions: suma, resta, bits de guarda, multiplicació i divisió
- Coma flotant en MIPS
- Associativitat de la suma

IEE-754: Codificacions especials

- Es reserven dos exponents per a casos especials
  - E = 000 . . . 0
  - E = 111 . . . 1
- Per tant
  - E_{min} = 000 . . . 01
  - E_{max} = 111 . . . 10
- Llavors, el rang és
  - E ∈ [-126, +127] (o bé [-1022, 1023], en doble precisió)
- Casos especials
  - Zero
  - Infinit
  - Not a Number
  - Denormals

IEE-754: Codificacions especials

- Zero
  - No hi ha cap combinació de Fracció i Exponent que doni zero!

$$(-1)^s \cdot (1 + 0,F) \cdot 2^E = 0 \qquad ???$$

IEE-754: Codificacions especials

- Zero
  - No hi ha cap combinació de Fracció i Exponent que doni zero!

$$(-1)^s \cdot (1 + 0,F) \cdot 2^E = 0 \qquad ???$$

  - Codificació especial del **zero**

E = 000 . . . 0 F = 000 . . . 0

IEE-754: Codificacions especials

- Zero
  - No hi ha cap combinació de Fracció i Exponent que doni zero!

$$(-1)^s \cdot (1 + 0,F) \cdot 2^E = 0 \qquad ???$$

  - Codificació especial del **zero**

E = 000 . . . 0 F = 000 . . . 0

  - De fet, amb el signe, tenim 2 codificacions del zero: +0 i –0
  - En simple precisió:

s 00000000 00000000000000000000000

IEE-754: Codificacions especials

- Infinit ("Inf")
  - Segueix algunes regles bàsiques d'operació. Per exemple

$$\frac{1}{0} = +\infty, \qquad \frac{1}{\infty} = 0, \qquad x + \infty = \infty, \quad \text{etc.}$$

IEE-754: Codificacions especials

- Infinit ("Inf")
  - Segueix algunes regles bàsiques d'operació. Per exemple

    $\frac{1}{0} = +\infty,$ $\frac{1}{\infty} = 0,$ $x + \infty = \infty,$ etc.

  - Concepte útil que permet evitar overflows en algunes expressions

$$y = \frac{1}{1 + \frac{100}{x}}$$

    Normalment, $\frac{100}{x}$ causaria overflow per a $x \to 0$

IEE-754: Codificacions especials

- Infinit ("Inf")
  - Segueix algunes regles bàsiques d'operació. Per exemple

    $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$, $x + \infty = \infty$, etc.

  - Concepte útil que permet evitar overflows en algunes expressions

$$y = \frac{1}{1 + \frac{100}{x}}$$

Normalment, $\frac{100}{x}$ causaria overflow per a $x \to 0$

Si usem l'infinit, $\frac{100}{x} = \infty$ i resulta $y = 0$

IEE-754: Codificacions especials

- Infinit ("Inf")
  - Segueix algunes regles bàsiques d'operació. Per exemple

    $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$, $x + \infty = \infty$, etc.

  - Concepte útil que permet evitar overflows en algunes expressions

    $$y = \frac{1}{1 + \frac{100}{x}}$$

    Normalment, $\frac{100}{x}$ causaria overflow per a $x \to 0$

    Si usem l'infinit, $\frac{100}{x} = \infty$ i resulta $y = 0$

  - Codificació especial de **Inf** (en realitat tenim +Inf i –Inf)

    E = 111 . . . 1 F = 000 . . . 0

IEE-754: Codificacions especials

- Infinit ("Inf")
  - Segueix algunes regles bàsiques d'operació. Per exemple

    $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$, $x + \infty = \infty$, etc.

  - Concepte útil que permet evitar overflows en algunes expressions

    $$y = \frac{1}{1 + \frac{100}{x}}$$

    Normalment, $\frac{100}{x}$ causaria overflow per a $x \to 0$

    Si usem l'infinit, $\frac{100}{x} = \infty$ i resulta $y = 0$

  - Codificació especial de **Inf** (en realitat tenim +Inf i –Inf)

    E = 111 . . . 1 F = 000 . . . 0

  - En simple precisió:

    s 11111111 00000000000000000000000

IEE-754: Codificacions especials

- Not a Number ("NaN")
  - Representa *resultat invàlid,* en algunes operacions:

$$\sqrt{-1} = \text{NaN} \qquad \log(-1) = \text{NaN}$$

$$\infty - \infty = \text{NaN} \qquad 0 \times \infty = \text{NaN}$$

$$\frac{\infty}{\infty} = \text{NaN}$$

  - El programa pot comprovar si un resultat és vàlid o no

IEE-754: Codificacions especials

- Not a Number ("NaN")
  - Representa *resultat invàlid,* en algunes operacions:

$$\sqrt{-1} = \text{NaN} \qquad \log(-1) = \text{NaN}$$

$$\infty - \infty = \text{NaN} \qquad 0 \times \infty = \text{NaN}$$

$$\frac{\infty}{\infty} = \text{NaN}$$

  - El programa pot comprovar si un resultat és vàlid o no
  - En general, qualsevol operació amb un NaN dona resultat = NaN

    → En una cadena de càlculs, podem diferir la comprovació fins al final

IEE-754: Codificacions especials

- Not a Number ("NaN")
  - Representa *resultat invàlid,* en algunes operacions:

$$\sqrt{-1} = \text{NaN} \qquad \log(-1) = \text{NaN}$$

$$\infty - \infty = \text{NaN} \qquad 0 \times \infty = \text{NaN}$$

$$\frac{\infty}{\infty} = \text{NaN}$$

  - El programa pot comprovar si un resultat és vàlid o no
  - En general, qualsevol operació amb un NaN dona resultat = NaN

    → En una cadena de càlculs, podem diferir la comprovació fins al final
  - Codificació de NaN

E = 111 . . . 1 F ≠ 000 . . . 0

IEE-754: Codificacions especials

- Not a Number ("NaN")
  - Representa *resultat invàlid,* en algunes operacions:

$$\sqrt{-1} = \text{NaN} \qquad \log(-1) = \text{NaN}$$

$$\infty - \infty = \text{NaN} \qquad 0 \times \infty = \text{NaN}$$

$$\frac{\infty}{\infty} = \text{NaN}$$

  - El programa pot comprovar si un resultat és vàlid o no
  - En general, qualsevol operació amb un NaN dona resultat = NaN

    → En una cadena de càlculs, podem diferir la comprovació fins al final
  - Codificació de NaN

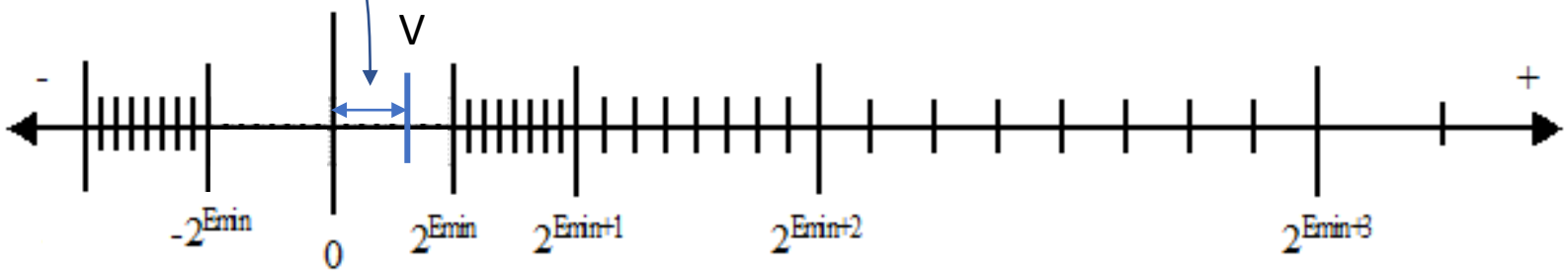
    E = 111 . . . 1 F ≠ 000 . . . 0
  - En simple precisió:

    s 11111111 xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx (algun x ≠ 0)

IEE-754: Codificacions especials

- Denormals
  - Un resultat molt petit, del tipus $|v| < 2^{Emin}$ no és fiable, ja que si l'arrodonim a 0, l'error de precisió és enorme

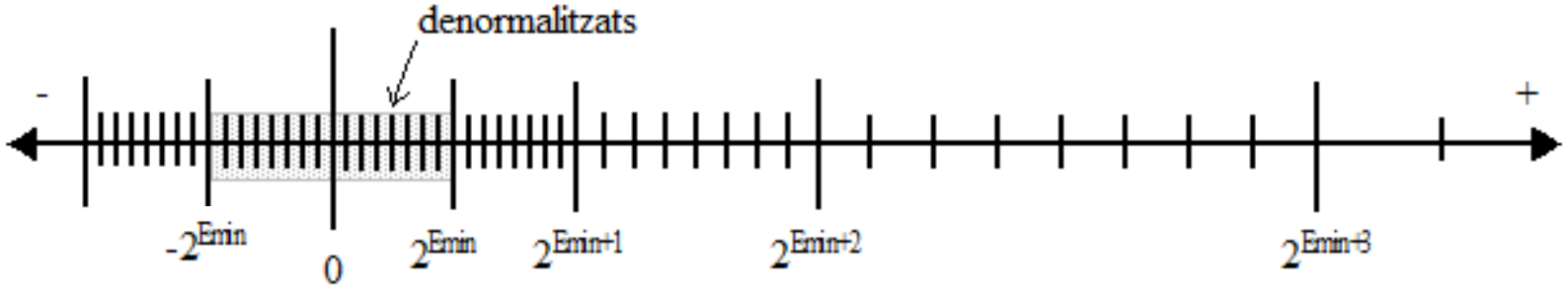
$\varepsilon = |v - 0| = |v|$ $\qquad \eta = \frac{|v-0|}{|v|} = 1$



IEE-754: Codificacions especials

- Denormals
  - Un resultat molt petit, del tipus |v| < 2^{Emin} no és fiable, ja que si l'arrodonim a 0, l'error de precisió és enorme

$$\varepsilon = |v - 0| = |v| \qquad \eta = \frac{|v-0|}{|v|} = 1$$



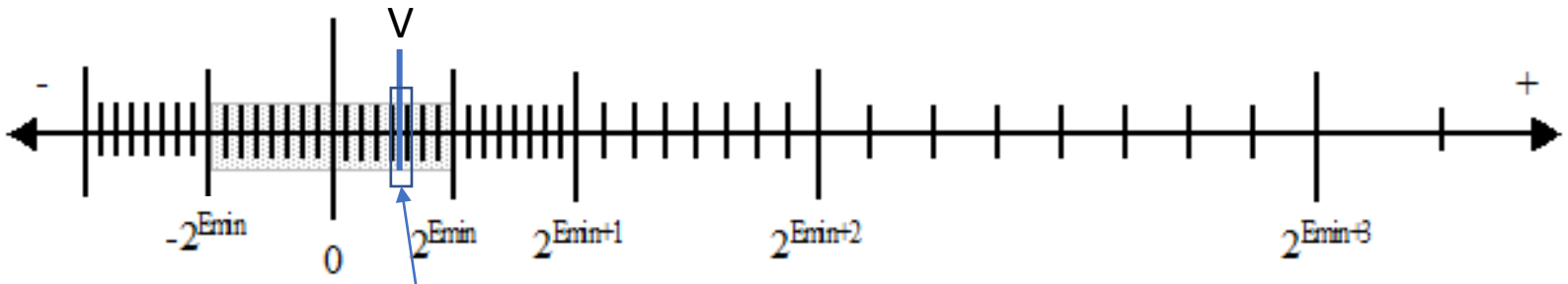
  - En aquests casos podem millorar la precisió admetent nombres no-normalitzats o *denormals* en el rang (0, 2^{Emin}), de la forma:

$$v = \pm\, 0{,}xxx \;\ldots\; x * 2^{Emin}$$

IEE-754: Codificacions especials

- Denormals
  - Un resultat molt petit, del tipus $|v| < 2^{Emin}$ no és fiable, ja que si l'arrodonim a 0, l'error de precisió és enorme

$$\varepsilon = |v - 0| = |v| \qquad \eta = \frac{|v-0|}{|v|} = 1$$



  - En aquests casos podem millorar la precisió admetent nombres no-normalitzats o *denormals* en el rang $(0, 2^{Emin})$, de la forma:

$$v = \pm\, 0{,}xxx \ \ldots \ x * 2^{Emin}$$

  - En simple precisió, la fita superior d'error absolut és

$$\varepsilon_{max} = |v_1 - v_0| = 2^{Emin-23}$$

IEE-754: Codificacions especials

- Denormals
  - Codificació

$$E = 000\ldots0 \qquad F \neq 000\ldots0$$

IEE-754: Codificacions especials

- Denormals
  - Codificació

    $E = 000 \ldots 0 \qquad F \neq 000 \ldots 0$

  - En simple precisió:

    s 00000000 xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx (algun $x \neq 0$)

IEE-754: Codificacions especials

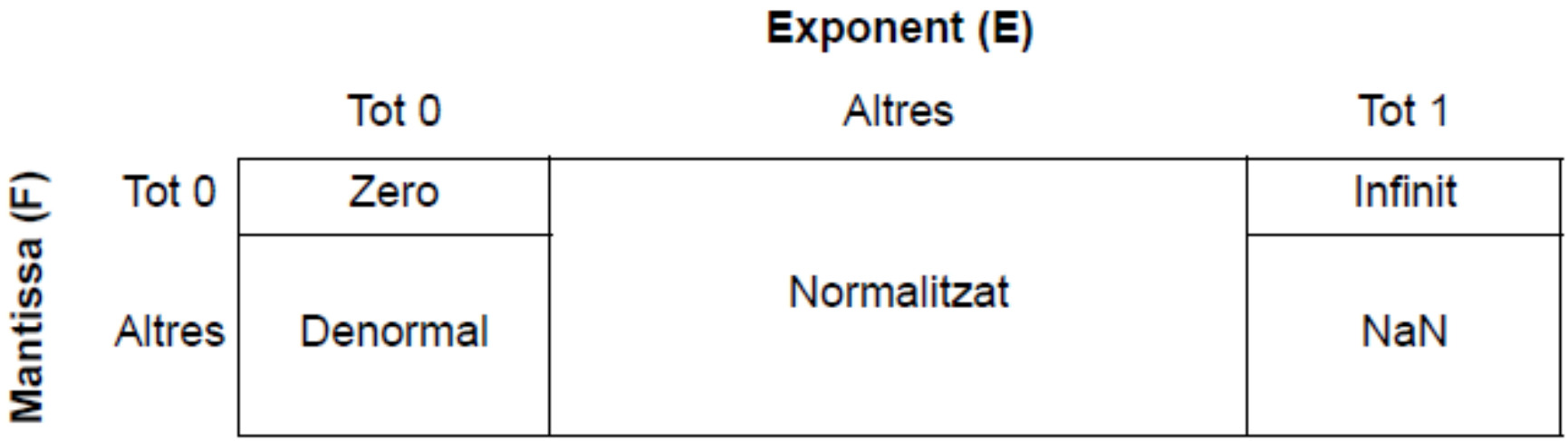
- Denormals
  - Codificació

    E = 000 . . . 0 F ≠ 000 . . . 0
  - En simple precisió:

    s 00000000 xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx (algun x ≠ 0)
  - Alerta! Si els hem d'operar, tinguem en compte que
    - El bit ocult implícit és 0
    - L'exponent implícit és E_{min}

      $v = \pm 0,xxx \ldots x * 2^{Emin}$

IEE-754: resum dels formats



Aritmètica de coma flotant

- Introducció
- Estàndard IEEE-754: Format
- Rang, precisió i arrodoniment
- Codificacions especials, underflow i nombres denormals
- Conversions entre base 10 i base 2
- Operacions: suma, resta, bits de guarda, multiplicació i divisió
- Coma flotant en MIPS
- Associativitat de la suma

Exemple. Representar v=-1029,68

1. Convertir la part entera, per divisions successives

   1029 = 10000000101 (té 11 bits)

Exemple. Representar v=-1029,68

1. Convertir la part entera, per divisions successives

   1029 = 10000000101 (té 11 bits)

2. Convertir la fracció, per multiplicacions successives

   0,68 × 2 = **1,**36 → 1 (1er bit de fracció)
   0,36 × 2 = **0,**72 → 0 (2on bit de fracció)
   ... etc.

   - Quants bits de fracció calculem?

Exemple. Representar v=-1029,68

1. Convertir la part entera, per divisions successives

   1029 = 10000000101 (té 11 bits)

2. Convertir la fracció, per multiplicacions successives

   0,68 × 2 = **1,**36 → 1 (1er bit de fracció)
   0,36 × 2 = **0,**72 → 0 (2on bit de fracció)
   ... etc.

   - Quants bits de fracció calculem?

     → 13 bits, per totalitzar 24 bits de mantissa

     0,68 = 0,**1010111000010** (té 13 bits)

Exemple. Representar v=-1029,68

1. Convertir la part entera, per divisions successives

   1029 = 10000000101 (té 11 bits)

2. Convertir la fracció, per multiplicacions successives

   0,68 × 2 = **1**,36 → 1 (1er bit de fracció)
   0,36 × 2 = **0**,72 → 0 (2on bit de fracció)
   ... etc.

   - Quants bits de fracció calculem?

     → 13 bits, per totalitzar 24 bits de mantissa

     0,68 = 0,**1010111000010** (té 13 bits)

     → i alguns "bits extra", per decidir com arrodonir al més pròxim

     0,68 = 0,1010111000010**10001**... (té 18 bits)

Exemple. Representar v=-1029,68

1. Convertir la part entera, per divisions successives

   1029 = 10000000101 (té 11 bits)

2. Convertir la fracció, per multiplicacions successives

   0,68 × 2 = **1**,36 → 1 (1er bit de fracció)
   0,36 × 2 = **0**,72 → 0 (2on bit de fracció)
   ... etc.

   - Quants bits de fracció calculem?

     → 13 bits, per totalitzar 24 bits de mantissa

     0,68 = 0,**1010111000010** (té 13 bits)

     → i alguns "bits extra", per decidir com arrodonir al més pròxim

     0,68 = 0,1010111000010**10001**... (té 18 bits)

3. Ajuntar part entera i fracció (11+18=29 bits)

   1029,68 = 10000000101,1010111000010**10001**...

Exemple. Representar v=-1029,68

1. Convertir la part entera, per divisions successives

   1029 = 10000000101 (té 11 bits)

2. Convertir la fracció, per multiplicacions successives

   0,68 × 2 = **1**,36 → 1 (1er bit de fracció)
   0,36 × 2 = **0**,72 → 0 (2on bit de fracció)
   ... etc.

   - Quants bits de fracció calculem?

     → 13 bits, per totalitzar 24 bits de mantissa

     0,68 = 0,**1010111000010** (té 13 bits)

     → i alguns "bits extra", per decidir com arrodonir al més pròxim

     0,68 = 0,1010111000010**10001**... (té 18 bits)

3. Ajuntar part entera i fracció (11+18=29 bits)

   1029,68 = 10000000101,1010111000010**10001**...

4. Normalitzar (moure la coma 10 llocs i ajustar l'exponent)

   1029,68 = 1,00000001011010111000010**10001**... × 2^{10}

Exemple (cont.)

5. Arrodonir (al més pròxim), usant els “bits extra”

$$1029{,}68 = 1{,}00000001011010111000010\mathbf{10001...} \times 2^{10}$$

$\rightarrow$ Arrodonim “al següent”

Exemple (cont.)

5. Arrodonir (al més pròxim), usant els “bits extra”

$$1029{,}68 = 1{,}00000001011010111000010\mathbf{10001...} \times 2^{10}$$

$\rightarrow$ Arrodonim “al següent”

$$1029{,}68 = 1{,}00000001011010111000010 \times 2^{10}$$

$$+\ \mathbf{1}$$

$$= 1{,}00000001011010111000011 \times 2^{10}$$

Exemple (cont.)

5. Arrodonir (al més pròxim), usant els “bits extra”

$$1029{,}68 = 1{,}00000001011010111000010\mathbf{10001...} \times 2^{10}$$

$\rightarrow$ Arrodonim “al següent”

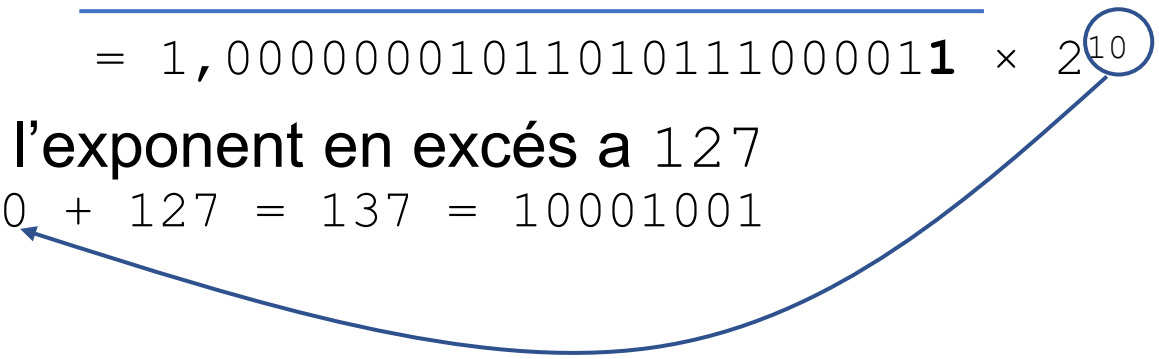
$$1029{,}68 = 1{,}00000001011010111000010 \times 2^{10}$$

$$+\ \mathbf{1}$$

$$= 1{,}00000001011010111000011 \times 2^{10}$$

6. Codificar l’exponent en excés a 127

$$E = 10 + 127 = 137 = 10001001$$



Exemple (cont.)

5. Arrodonir (al més pròxim), usant els “bits extra”

$$1029{,}68 = 1{,}00000001011010111000010\mathbf{10001...} \times 2^{10}$$

→ Arrodonim “al següent”

$$1029{,}68 = 1{,}00000001011010111000010 \times 2^{10}$$

$$+\ \mathbf{1}$$

$$= 1{,}00000001011010111000011 \times 2^{10}$$

6. Codificar l’exponent en excés a 127

$$E = 10 + 127 = 137 = 10001001$$

7. Ajuntar signe, exponent i fracció
   - La part entera (1) no s’escriu: és el bit ocult!

Exemple (cont.)

5. Arrodonir (al més pròxim), usant els “bits extra”

$$1029{,}68 = 1{,}00000001011010111000010\mathbf{10001...} \times 2^{10}$$

→ Arrodonim “al següent”

$$1029{,}68 = 1{,}00000001011010111000010 \times 2^{10}$$

$$+\ \mathbf{1}$$

$$= 1{,}00000001011010111000011 \times 2^{10}$$

6. Codificar l’exponent en excés a 127

$$E = 10 + 127 = 137 = 10001001$$

7. Ajuntar signe, exponent i fracció
   - La part entera (1) no s’escriu: és el bit ocult!

$$-1029{,}68 = \underbrace{1}_{\text{signe}}\ \underbrace{10001001}_{\text{exponent}}\ \underbrace{00000001011010111000011}_{\text{fracció}}$$

Exemple (cont.)

5. Arrodonir (al més pròxim), usant els “bits extra”

   $1029{,}68 = 1{,}00000001011010111000010\mathbf{10001...} \times 2^{10}$

   → Arrodonim “al següent”

   $1029{,}68 = 1{,}00000001011010111000010 \times 2^{10}$

   $+\ \mathbf{1}$

   $= 1{,}00000001011010111000011 \times 2^{10}$

6. Codificar l’exponent en excés a 127

   $E = 10 + 127 = 137 = 10001001$

7. Ajuntar signe, exponent i fracció
   - La part entera (1) no s’escriu: és el bit ocult!

   $-1029{,}68 = 1\ 10001001\ 00000001011010111000011$

8. Expressar en hexadecimal

   $-1029{,}68 = \mathbf{0xC480B5C3}$

Exemple (cont.)

- Calcular l'error de precisió: $\varepsilon = |v - v_0|$
  - Restant el valor arrodonit i el valor "exacte"

$$\begin{aligned}
\varepsilon = \quad & (1{,}00000001011010111000011 \times 2^{10} \\
& - 1{,}00000001011010111000010\mathbf{10001}... \times 2^{10}) \\
= \quad & 0{,}00000000000000000000001111 \times 2^{10}
\end{aligned}$$

Exemple (cont.)

- Calcular l'error de precisió: $\varepsilon = |v - v_0|$
  - Restant el valor arrodonit i el valor "exacte"

$$\varepsilon = (1{,}00000001011010111000011 \times 2^{10}$$
$$- 1{,}00000001011010111000010\mathbf{10001}... \times 2^{10})$$
$$= 0{,}00000000000000000000001111 \times 2^{10}$$

  - Normalitzem: movem la coma 25 posicions a la dreta …

$$\varepsilon = ,00000000000000000000001{,}111 \times 2^{10-25}$$
$$= \mathbf{1{,}111 \times 2^{-15}}$$

Exemple (cont.)

- Calcular l'error de precisió: $\varepsilon = |v - v_0|$
  - Restant el valor arrodonit i el valor "exacte"

$$\varepsilon = (1{,}00000001011010111000011 \times 2^{10}$$
$$- 1{,}00000001011010111000010\mathbf{10001}... \times 2^{10})$$
$$= 0{,}00000000000000000000001111 \times 2^{10}$$

  - Normalitzem: movem la coma 25 posicions a la dreta …

$$\varepsilon = 00000000000000000000001{,}111 \times 2^{10-25}$$
$$= \mathbf{1{,}111 \times 2^{-15}}$$

  - Convertim a decimal (no es demanarà sense calculadora) …

$$\varepsilon = 1{,}875 \times 2^{-15}$$
$$= 1{,}875 / 2^{15}$$
$$= 1{,}875/32768$$
$$= \mathbf{5{,}722 \times 10^{-5}}$$

Exemple: convertir `v=0x45814140` a base `10`

1. L'escrivim en binari
   `v = 0100 0101 1000 0001 0100 0001 0100 0000`

Exemple: convertir `v=0x45814140` a base `10`

1. L'escrivim en binari
   `v = 0100 0101 1000 0001 0100 0001 0100 0000`
2. Identifiquem els 3 camps: signe, exponent, fracció
   `v = 0 10001011 00000010100000101000000`

Exemple: convertir `v=0x45814140` a base `10`

1. L'escrivim en binari
   `v = 0100 0101 1000 0001 0100 0001 0100 0000`
2. Identifiquem els 3 camps: signe, exponent, fracció
   `v = 0 10001011 00000010100000101000000`
3. Convertim l'exponent a decimal i li restem l'excés `127`
   `10001011 = 139`
   `E = 139 - 127 = 12`

Exemple: convertir v=0x45814140 a base 10

1. L'escrivim en binari
   v = 0100 0101 1000 0001 0100 0001 0100 0000
2. Identifiquem els 3 camps: signe, exponent, fracció
   v = 0 10001011 00000010100000101000000
3. Convertim l'exponent a decimal i li restem l'excés 127
   10001011 = 139
   E = 139 - 127 = 12
4. En coma flotant: signe, bit ocult, fracció i exponent
   v = +1,00000010100000101000000 × 2^{12}

Exemple: convertir v=0x45814140 a base 10

1. L'escrivim en binari
   v = 0100 0101 1000 0001 0100 0001 0100 0000
2. Identifiquem els 3 camps: signe, exponent, fracció
   v = 0 10001011 00000010100000101000000
3. Convertim l'exponent a decimal i li restem l'excés 127
   10001011 = 139
   E = 139 − 127 = 12
4. En coma flotant: signe, bit ocult, fracció i exponent
   v = +**1**,00000010100000101000000 × 2^{12}
5. En coma fixa: moure la coma 12 llocs a la dreta i eliminar zeros finals
   v = +**1**00000010100**0**,00101~~000000~~

Exemple: convertir v=0x45814140 a base 10

$$v = +1000000101000,00101$$

6. Convertir la part entera a base 10 (suma ponderada)

$$1000000101000 = \mathbf{1}\cdot 2^{12} + \mathbf{1}\cdot 2^{5} + \mathbf{1}\cdot 2^{3} = 4136$$

Exemple: convertir v=0x45814140 a base 10

$v = +1000000101000,00101$

6. Convertir la part entera a base 10 (suma ponderada)

$$1000000101000 = \mathbf{1}\cdot 2^{12} + \mathbf{1}\cdot 2^{5} + \mathbf{1}\cdot 2^{3} = 4136$$

7. Convertir la fracció a base 10 (movent la coma a dreta)

$$0,00101 = 101 \times 2^{-5} = 5/32 = 0,15625$$

Exemple: convertir v=0x45814140 a base 10

$v = +1000000101000,00101$

6. Convertir la part entera a base 10 (suma ponderada)

$1000000101000 = \mathbf{1}\cdot 2^{12} + \mathbf{1}\cdot 2^{5} + \mathbf{1}\cdot 2^{3} = 4136$

7. Convertir la fracció a base 10 (movent la coma a dreta)

$0,00101 = 101 \times 2^{-5} = 5/32 = 0,15625$

8. Ajuntar part entera i fracció

v = 4136,15625

Aritmètica de coma flotant

- Introducció
- Estàndard IEEE-754: Format
- Rang, precisió i arrodoniment
- Codificacions especials, underflow i nombres denormals
- Conversions entre base 10 i base 2
- Operacions: suma, resta, bits de guarda, multiplicació i divisió
- Coma flotant en MIPS
- Associativitat de la suma

Suma (resta) en coma flotant

- Suposem un cas senzill que coneixem bé (base 10):
  - Format: mantissa normalitzada amb 4 dígits: $x,xxx \times 10^{xx}$
  - Sumar: $9,999 \times 10^{1} + 1,680 \times 10^{-1}$

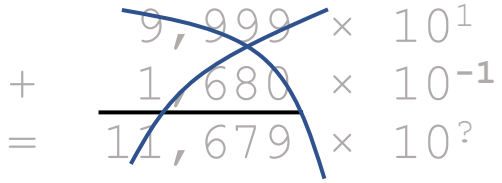
Suma (resta) en coma flotant

- Suposem un cas senzill que coneixem bé (base 10):
  - Format: mantissa normalitzada amb 4 dígits: $x,xxx \times 10^{xx}$
  - Sumar: $9,999 \times 10^{1} + 1,680 \times 10^{-1}$
  - Així?

$$\begin{array}{rl} & 9,999 \times 10^{1} \\ + & 1,680 \times 10^{-1} \\ \hline = & 11,679 \times 10^{?} \end{array}$$

Suma (resta) en coma flotant

- Suposem un cas senzill que coneixem bé (base 10):
  - Format: mantissa normalitzada amb 4 dígits: $x,xxx \times 10^{xx}$
  - Sumar: $9,999 \times 10^{1} + 1,680 \times 10^{-1}$
  - Així? No!



Suma (resta) en coma flotant

- Suposem un cas senzill que coneixem bé (base 10):
  - Format: mantissa normalitzada amb 4 dígits: $x,xxx \times 10^{xx}$
  - Sumar: $9,999 \times 10^{1} + 1,680 \times 10^{-1}$
  - Així? No!

$$\begin{array}{rl} & 9,999 \times 10^{1} \\ + & 1,680 \times 10^{-1} \\ \hline = & 11,679 \times 10^{?} \end{array}$$

  - Igualar exponents (al major = 1), alinear mantisses i sumar:

$$\begin{array}{rl} & 9,999 \times 10^{1} \\ + & 0,01680 \times 10^{1} \\ \hline = & 10,01580 \times 10^{1} \end{array}$$

Suma (resta) en coma flotant

- Suposem un cas senzill que coneixem bé (base 10):
  - Format: mantissa normalitzada amb 4 dígits: $x,xxx \times 10^{xx}$
  - Sumar: $9,999 \times 10^{1} + 1,680 \times 10^{-1}$
  - Així? No!

$$\begin{array}{rl} & 9,999 \times 10^{1} \\ + & 1,680 \times 10^{-1} \\ \hline = & 11,679 \times 10^{?} \end{array}$$

  - Igualar exponents (al major = 1), alinear mantisses i sumar:

$$\begin{array}{rl} & 9,999 \times 10^{1} \\ + & 0,01680 \times 10^{1} \\ \hline = & 10,01580 \times 10^{1} \end{array}$$

  - Normalitzar:

$$1,001580 \times 10^{2}$$

Suma (resta) en coma flotant

- Suposem un cas senzill que coneixem bé (base 10):
  - Format: mantissa normalitzada amb 4 dígits: $x,xxx \times 10^{xx}$
  - Sumar: $9,999 \times 10^{1} + 1,680 \times 10^{-1}$
  - Així? No!

$$\begin{array}{rl} & 9,999 \times 10^{1} \\ + & 1,680 \times 10^{-1} \\ \hline = & 11,679 \times 10^{?} \end{array}$$

  - Igualar exponents (al major = 1), alinear mantisses i sumar:

$$\begin{array}{rl} & 9,999 \times 10^{1} \\ + & 0,01680 \times 10^{1} \\ \hline = & 10,01580 \times 10^{1} \end{array}$$

  - Normalitzar:

$$1,001580 \times 10^{2}$$

  - Arrodonir a 4 dígits:

$$1,0015\mathbf{80} \times 10^{2}$$

$$1,002 \times 10^{2}$$

Suma (resta) en coma flotant

1. Igualar els exponents, al major dels dos
   - I alinear les mantisses, desplaçant a l'esquerra la coma d'aquella amb menor exponent

Suma (resta) en coma flotant

1. Igualar els exponents, al major dels dos
   - I alinear les mantisses, desplaçant a l'esquerra la coma d'aquella amb menor exponent
2. Sumar les magnituds (valors absoluts)
   - Signes iguals $\rightarrow$ sumar magnituds
   - Signes diferents $\rightarrow$ restar la magnitud major menys la menor, i assignar al resultat el signe de la major

Suma (resta) en coma flotant

1. Igualar els exponents, al major dels dos
   - I alinear les mantisses, desplaçant a l'esquerra la coma d'aquella amb menor exponent
2. Sumar les magnituds (valors absoluts)
   - Signes iguals $\rightarrow$ sumar magnituds
   - Signes diferents $\rightarrow$ restar la magnitud major menys la menor, i assignar al resultat el signe de la major
3. Normalitzar el resultat
   - Movent la coma per obtenir un dígit no-nul a la part entera

Suma (resta) en coma flotant

1. Igualar els exponents, al major dels dos
   - I alinear les mantisses, desplaçant a l'esquerra la coma d'aquella amb menor exponent
2. Sumar les magnituds (valors absoluts)
   - Signes iguals $\rightarrow$ sumar magnituds
   - Signes diferents $\rightarrow$ restar la magnitud major menys la menor, i assignar al resultat el signe de la major
3. Normalitzar el resultat
   - Movent la coma per obtenir un dígit no-nul a la part entera
4. Arrodonir la mantissa
   - Al valor representable més pròxim
   - Pot requerir haver de normalitzar i arrodonir per segon cop

Suma (resta) en coma flotant

1. Igualar els exponents, al major dels dos
   - I alinear les mantisses, desplaçant a l'esquerra la coma d'aquella amb menor exponent
2. Sumar les magnituds (valors absoluts)
   - Signes iguals $\rightarrow$ sumar magnituds
   - Signes diferents $\rightarrow$ restar la magnitud major menys la menor, i assignar al resultat el signe de la major
3. Normalitzar el resultat
   - Movent la coma per obtenir un dígit no-nul a la part entera
4. Arrodonir la mantissa
   - Al valor representable més pròxim
   - Pot requerir haver de normalitzar i arrodonir per segon cop
5. Codificar el resultat
   - Signe, exponent (en excés) i mantissa (sense el bit ocult)

Exemple: sumar z = x + y

Suposem `x=0x3F40000D`, `y=0xC0800004`

1. Els escrivim en binari

```
x = 0011 1111 0100 0000 0000 0000 0000 1101
y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100
```

Exemple: sumar z = x + y

Suposem `x=0x3F40000D`, `y=0xC0800004`

1. Els escrivim en binari

```
x = 0011 1111 0100 0000 0000 0000 0000 1101
y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100
```

2. Identifiquem els camps: signe, exponent, fracció

```
x = 0 01111110 10000000000000000001101
y = 1 10000001 00000000000000000000100
```

Exemple: sumar z = x + y

Suposem `x=0x3F40000D`, `y=0xC0800004`

1. Els escrivim en binari

   `x = 0011 1111 0100 0000 0000 0000 0000 1101`

   `y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100`

2. Identifiquem els camps: signe, exponent, fracció

   `x = 0 01111110 10000000000000000001101`

   `y = 1 10000001 00000000000000000000100`

3. Convertim exponents a base 10 (restant l'excés)

   `01111110 = 126` $\rightarrow$ E = `126-127 = -1`

   `10000001 = 129` $\rightarrow$ E = `129-127 = 2`

Exemple: sumar z = x + y

Suposem `x=0x3F40000D`, `y=0xC0800004`

1. Els escrivim en binari

   `x = 0011 1111 0100 0000 0000 0000 0000 1101`

   `y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100`

2. Identifiquem els camps: signe, exponent, fracció

   `x = 0 01111110 10000000000000000001101`

   `y = 1 10000001 00000000000000000000100`

3. Convertim exponents a base 10 (restant l'excés)

   `01111110 = 126` $\rightarrow$ E = `126-127 = -1`

   `10000001 = 129` $\rightarrow$ E = `129-127 = 2`

4. Expressem *x* i *y* en coma flotant, afegint el bit ocult i el signe

   $x = \mathbf{+1,}10000000000000000001101 \times 2^{-1}$

   $y = \mathbf{-1,}00000000000000000000100 \times 2^{2}$

Exemple: sumar z = x + y

Suposem `x=0x3F40000D`, `y=0xC0800004`

1. Els escrivim en binari

   `x = 0011 1111 0100 0000 0000 0000 0000 1101`

   `y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100`

2. Identifiquem els camps: signe, exponent, fracció

   `x = 0 01111110 10000000000000000001101`

   `y = 1 10000001 00000000000000000000100`

3. Convertim exponents a base 10 (restant l'excés)

   `01111110 = 126` $\rightarrow$ E = `126-127 = -1`

   `10000001 = 129` $\rightarrow$ E = `129-127 = 2`

4. Expressem x i y en coma flotant, afegint el bit ocult i el signe

   `x =` **`+1,`**`10000000000000000001101` $\times 2^{-1}$

   `y =` **`-1,`**`00000000000000000000100` $\times 2^{2}$

5. Igualem exponents al major (=2), movent la coma 3 bits a l'esquerra

   `x = +0,001`**`10000000000000000001`**`101` $\times 2^{2}$

   Fracció de 23 bits — bits extra

Exemple: sumar z = x + y

$$x = +0,001100000000000000000001101 \times 2^{2}$$
$$y = -1,000000000000000000000100 \times 2^{2}$$

4. Signes diferents → restar la magnitud major (y) menys la menor (x)...

$$|y| = 1,000000000000000000000100 \times 2^{2}$$
$$-|x| = 0,001100000000000000000001101 \times 2^{2}$$
$$|z| = 0,110100000000000000000010011 \times 2^{2}$$

Exemple: sumar z = x + y

$$x = +0,001100000000000000000001101 \times 2^{2}$$
$$y = -1,00000000000000000000100 \times 2^{2}$$

4. Signes diferents → restar la magnitud major (y) menys la menor (x)...

$$|y| = 1,00000000000000000000100 \times 2^{2}$$
$$-|x| = 0,00110000000000000000001101 \times 2^{2}$$
$$|z| = 0,11010000000000000000010011 \times 2^{2}$$

...i assignar el signe del que té major valor absolut: és *y* (negatiu)

$$z = -0,11010000000000000000010011 \times 2^{2}$$

Exemple: sumar z = x + y

$z = -0,11010000000000000000010\mathbf{011} \times 2^{2}$

5. Normalitzar mantissa (desplaçant els bits a l'esquerra)

$|z| = 1,10100000000000000000100\mathbf{11} \times 2^{1}$

Exemple: sumar z = x + y

$$z = -0,11010000000000000000010\mathbf{011} \times 2^{2}$$

5. Normalitzar mantissa (desplaçant els bits a l'esquerra)

$$|z| = 1,10100000000000000001001\mathbf{1} \times 2^{1}$$

6. Arrodonir mantissa (amunt)

$$|z| = 1,10100000000000000001001 \times 2^{1}$$

$$+ \quad 1$$

$$|z| = 1,10100000000000000001010 \times 2^{1}$$

Exemple: sumar z = x + y

$$z = -0,11010000000000000000010\mathbf{011} \times 2^{2}$$

5. Normalitzar mantissa (desplaçant els bits a l'esquerra)

$$|z| = 1,10100000000000000000100\mathbf{11} \times 2^{1}$$

6. Arrodonir mantissa (amunt)

$$|z| = 1,10100000000000000000100 \times 2^{1}$$

$$+ \quad 1$$

$$|z| = 1,10100000000000000000101 \times 2^{1}$$

7. Codificar exponent (en excés)

$$E \rightarrow 1+127 = 128 = 10000000$$

Exemple: sumar z = x + y

$z = -0,11010000000000000000010\mathbf{011} \times 2^2$

5. Normalitzar mantissa (desplaçant els bits a l'esquerra)

$|z| = 1,10100000000000000000100\mathbf{11} \times 2^1$

6. Arrodonir mantissa (amunt)

$|z| = 1,10100000000000000000100 \times 2^1$

$+ \quad 1$

$|z| = 1,10100000000000000000101 \times 2^1$

7. Codificar exponent (en excés)

$E \rightarrow 1+127 = 128 = 10000000$

8. Ajuntar signe (negatiu=1), exponent i fracció (sense el bit ocult)

$z = 1\ 10000000\ 10100000000000000000101$

$= 1100\ 0000\ 0101\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0101$

$= \mathbf{0xC0500005}$

Bits de guarda

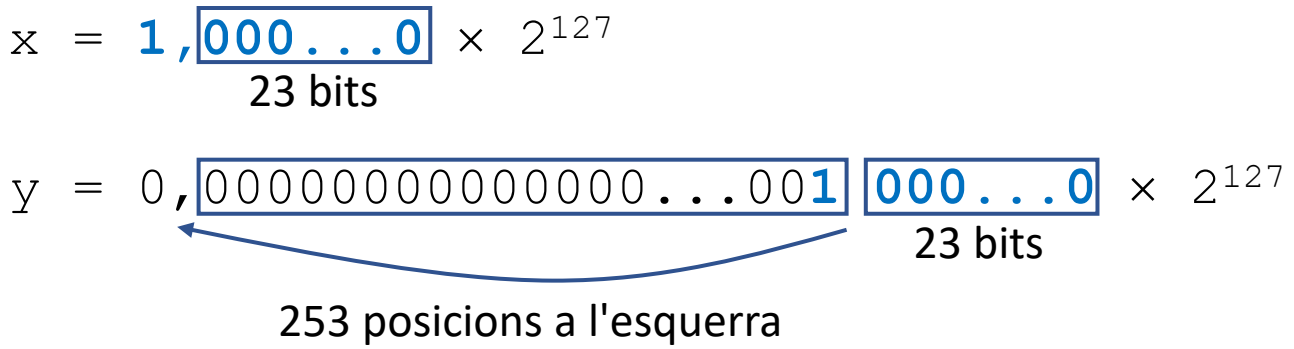
- Quan igualem els exponents al major, ¿quants bits es desplaça la mantissa en el pitjor cas?

Bits de guarda

- Quan igualem els exponents al major, ¿quants bits es desplaça la mantissa en el pitjor cas?
  - Per exemple, restem $x = 1{,}0 \times 2^{127}$ menys $y = 1{,}0 \times 2^{-126}$

Bits de guarda

- Quan igualem els exponents al major, ¿quants bits es desplaça la mantissa en el pitjor cas?
  - Per exemple, restem $x = 1{,}0 \times 2^{127}$ menys $y = 1{,}0 \times 2^{-126}$
  - Igualem els exponents al major = 127, movent la coma a l'esquerra 126 + 127 = 253 posicions



Bits de guarda

- Quan igualem els exponents al major, ¿quants bits es desplaça la mantissa en el pitjor cas?
  - Per exemple, restem $x = 1{,}0 \times 2^{127}$ menys $y = 1{,}0 \times 2^{-126}$
  - Igualem els exponents al major = 127, movent la coma a l'esquerra 126 + 127 = 253 posicions

$$x = 1{,}000\ldots0 \times 2^{127}$$

23 bits

$$y = 0{,}00000000000000\ldots001\ 000\ldots0 \times 2^{127}$$

més de 200 bits "extra"

- Per no perdre precisió ens cal un sumador amb més de 200 bits bits de guarda!

Bits de guarda

- Podem aconseguir el mateix resultat amb sols 3 bits de guarda
  - Guard (**G**): bit 24 de la mantissa
  - Round (**R**): bit 25 de la mantissa
  - Sticky (**S**): OR lògica de tots els bits a la dreta del bit 25

Bits de guarda

- Podem aconseguir el mateix resultat amb sols 3 bits de guarda
  - Guard (**G**): bit 24 de la mantissa
  - Round (**R**): bit 25 de la mantissa
  - Sticky (**S**): OR lògica de tots els bits a la dreta del bit 25
- Exemple:

$x = 1,00000000000000000000000 \times 2^{5}$

$-y = 1,00110011001100110011011 \times 2^{-3}$

Bits de guarda

- Podem aconseguir el mateix resultat amb sols 3 bits de guarda
  - Guard (**G**): bit 24 de la mantissa
  - Round (**R**): bit 25 de la mantissa
  - Sticky (**S**): OR lògica de tots els bits a la dreta del bit 25
- Exemple:

$x = 1,00000000000000000000000 \times 2^{5}$

$-y = 1,00110011001100110011011 \times 2^{-3}$

- Igualant exponents i alineant mantisses

$x = 1,00000000000000000000000 \times 2^{5}$

$-y = 0,00000001001100110011001100110011011 \times 2^{5}$

Bits de guarda

- Podem aconseguir el mateix resultat amb sols 3 bits de guarda
  - Guard (**G**): bit 24 de la mantissa
  - Round (**R**): bit 25 de la mantissa
  - Sticky (**S**): OR lògica de tots els bits a la dreta del bit 25
- Exemple:

$x = 1,00000000000000000000000 \times 2^{5}$

$-y = 1,00110011001100110011011 \times 2^{-3}$

- Igualant exponents i alineant mantisses

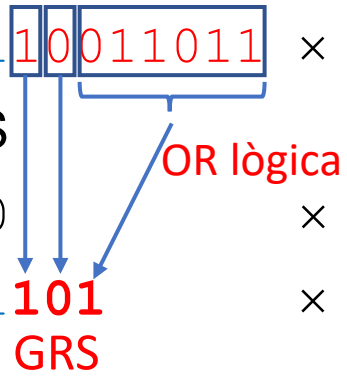
$x = 1,00000000000000000000000 \times 2^{5}$

$-y = 0,00000001001100110011001\,1\,0\,011011 \times 2^{5}$

- Operem amb 3 bits de guarda: G, R, S

$x = 1,00000000000000000000000 \times 2^{5}$

$-y = 0,00000001001100110011001\,101 \times 2^{5}$



Bits de guarda

- Podem aconseguir el mateix resultat amb sols 3 bits de guarda
  - Guard (**G**): bit 24 de la mantissa
  - Round (**R**): bit 25 de la mantissa
  - Sticky (**S**): OR lògica de tots els bits a la dreta del bit 25
- Exemple:

$x = 1,00000000000000000000000 \times 2^{5}$

$-y = 1,00110011001100110011011 \times 2^{-3}$

- Igualant exponents i alineant mantisses

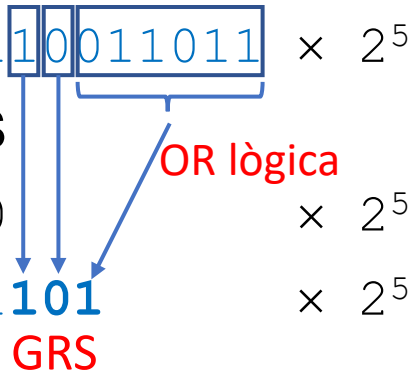
$x = 1,00000000000000000000000 \times 2^{5}$

$-y = 0,00000001001100110011001\,1\,0\,011011 \times 2^{5}$

- Operem amb 3 bits de guarda: G, R, S

$x = 1,00000000000000000000000 \times 2^{5}$

$-y = 0,00000001001100110011001\,101 \times 2^{5}$



- **I obtindrem idèntic resultat que amb infinits bits!**

Multiplicació (divisió) en coma flotant

- Siguin *x*, *y*

$$x = m_x \cdot 2^{ex}$$

$$y = m_y \cdot 2^{ey}$$

- El producte i el quocient són

$$x \times y = m_x \cdot 2^{ex} \times m_y \cdot 2^{ey} = (m_x \times m_y) \cdot 2^{(ex+ey)}$$

$$x / y = m_x \cdot 2^{ex} / m_y \cdot 2^{ey} = (m_x / m_y) \cdot 2^{(ex-ey)}$$

Multiplicació (divisió) en coma flotant

- Siguin *x*, *y*

$$x = m_x \cdot 2^{ex}$$

$$y = m_y \cdot 2^{ey}$$

- El producte i el quocient són

$$x \times y = m_x \cdot 2^{ex} \times m_y \cdot 2^{ey} = (m_x \times m_y) \cdot 2^{(ex+ey)}$$

$$x / y = m_x \cdot 2^{ex} / m_y \cdot 2^{ey} = (m_x / m_y) \cdot 2^{(ex-ey)}$$

- Algorisme
  - Multiplicar (o dividir) les mantisses (igual que amb els naturals)

Multiplicació (divisió) en coma flotant

- Siguin *x*, *y*

$$x = m_x \cdot 2^{ex}$$

$$y = m_y \cdot 2^{ey}$$

- El producte i el quocient són

$$x \times y = m_x \cdot 2^{ex} \times m_y \cdot 2^{ey} = (m_x \times m_y) \cdot 2^{(ex+ey)}$$

$$x / y = m_x \cdot 2^{ex} / m_y \cdot 2^{ey} = (m_x / m_y) \cdot 2^{(ex-ey)}$$

- Algorisme
  - Multiplicar (o dividir) les mantisses (igual que amb els naturals)
  - Sumar (o restar) exponents

Multiplicació (divisió) en coma flotant

- Siguin *x*, *y*

$$x = m_x \cdot 2^{ex}$$

$$y = m_y \cdot 2^{ey}$$

- El producte i el quocient són

$$x \times y = m_x \cdot 2^{ex} \times m_y \cdot 2^{ey} = (m_x \times m_y) \cdot 2^{(ex+ey)}$$

$$x / y = m_x \cdot 2^{ex} / m_y \cdot 2^{ey} = (m_x / m_y) \cdot 2^{(ex-ey)}$$

- Algorisme
  - Multiplicar (o dividir) les mantisses (igual que amb els naturals)
  - Sumar (o restar) exponents
  - Ajustar el signe: positiu si els signes són iguals, negatiu altrament

Exemple en base 10

- Suposem un cas senzill que coneixem bé (base 10)
  - Format: mantissa normalitzada de 4 dígits: $x,xxx \cdot 10^{xx}$
  - Multiplicar: $(-1,110 \cdot 10^{10}) \times (9,200 \cdot 10^{-5})$

Exemple en base 10

- Suposem un cas senzill que coneixem bé (base 10)
  - Format: mantissa normalitzada de 4 dígits: $x,xxx \cdot 10^{xx}$
  - Multiplicar: $(-1,110 \cdot 10^{10}) \times (9,200 \cdot 10^{-5})$
  - Producte de mantisses:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 1 & , & 1 & 1 & 0 \\
 & & \times & 9 & , & 2 & 0 & 0 \\
\hline
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & 2 & 2 & 2 & 0 & & & \\
+ & 9 & 9 & 9 & 0 & & & \\
\hline
1 & 0 & , & 2 & 1 & 2 & 0 & 0
\end{array}
$$

Exemple en base 10

- Suposem un cas senzill que coneixem bé (base 10)
  - Format: mantissa normalitzada de 4 dígits: $x,xxx \cdot 10^{xx}$
  - Multiplicar: $(-1,110 \cdot 10^{10}) \times (9,200 \cdot 10^{-5})$
  - Producte de mantisses:

$$
\begin{array}{r}
1,1\ 1\ 0 \\
\times\ 9,2\ 0\ 0 \\
\hline
0\ 0\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0 \\
2\ 2\ 2\ 0 \\
+\ 9\ 9\ 9\ 0 \\
\hline
1\ 0,2\ 1\ 2\ 0\ 0\ 0
\end{array}
$$

  - Suma d'exponents: 10 + (-5) = 5

$$1\ 0,2\ 1\ 2\ 0\ 0\ 0 \cdot 10^{5}$$

Exemple en base 10

- Suposem un cas senzill que coneixem bé (base 10)
  - Format: mantissa normalitzada de 4 dígits: $x,xxx \cdot 10^{xx}$
  - Multiplicar: $(-1,110 \cdot 10^{10}) \times (9,200 \cdot 10^{-5})$
  - Producte de mantisses:

$$
\begin{array}{r}
1,1\ 1\ 0 \\
\times\ 9,2\ 0\ 0 \\
\hline
0\ 0\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0 \\
2\ 2\ 2\ 0 \\
+\ 9\ 9\ 9\ 0 \\
\hline
1\ 0,2\ 1\ 2\ 0\ 0\ 0
\end{array}
$$

  - Suma d'exponents: 10 + (-5) = 5

$$1\ 0,2\ 1\ 2\ 0\ 0\ 0 \cdot 10^{5}$$

  - Normalitzar:

$$1,0\ 2\ 1\ 2\ 0\ 0\ 0 \cdot 10^{6}$$

Exemple en base 10

- Suposem un cas senzill que coneixem bé (base 10)
  - Format: mantissa normalitzada de 4 dígits: $x,xxx \cdot 10^{xx}$
  - Multiplicar: $(-1,110 \cdot 10^{10}) \times (9,200 \cdot 10^{-5})$
  - Producte de mantisses:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 1, & 1 & 1 & 0 \\
 & & & \times & 9, & 2 & 0 & 0 \\
\hline
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & 2 & 2 & 2 & 0 & & \\
+ & 9 & 9 & 9 & 0 & & \\
\hline
1 & 0, & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

  - Suma d'exponents: 10 + (-5) = 5

$$1\ 0,2\ 1\ 2\ 0\ 0\ 0 \cdot 10^{5}$$

  - Normalitzar:

$$1,0\ 2\ 1\ \boxed{2\ 0\ 0\ 0} \cdot 10^{6}$$

  - Arrodonir a 4 dígits (avall):

$$1,0\ 2\ \mathbf{1} \cdot 10^{6}$$

Exemple en base 10

- Suposem un cas senzill que coneixem bé (base 10)
  - Format: mantissa normalitzada de 4 dígits: $x,xxx \cdot 10^{xx}$
  - Multiplicar: $(-1,110 \cdot 10^{10}) \times (9,200 \cdot 10^{-5})$
  - Producte de mantisses:

$$
\begin{array}{r}
1,1\ 1\ 0 \\
\times\ 9,2\ 0\ 0 \\
\hline
0\ 0\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0 \\
2\ 2\ 2\ 0 \\
+\ 9\ 9\ 9\ 0 \\
\hline
1\ 0,2\ 1\ 2\ 0\ 0\ 0
\end{array}
$$

  - Suma d'exponents: 10 + (-5) = 5

$$1\ 0,2\ 1\ 2\ 0\ 0\ 0 \cdot 10^{5}$$

  - Normalitzar:

$$1,0\ 2\ 1\ 2\ 0\ 0\ 0 \cdot 10^{6}$$

  - Arrodonir a 4 dígits (avall):

$$1,0\ 2\ 1 \cdot 10^{6}$$

  - Afegir signe (negatiu): $\mathbf{-1,021 \cdot 10^{6}}$

Exemple en base 2: $z = x \times y$

Suposem `x=0x3F600000`, `y=0xBED00002`

1. Els escrivim en binari

x = 0011 1111 0110 0000 0000 0000 0000 0000

y = 1011 1110 1101 0000 0000 0000 0000 0010

Exemple en base 2: $z = x \times y$

Suposem `x=0x3F600000`, `y=0xBED00002`

1. Els escrivim en binari

   x = 0011 1111 0110 0000 0000 0000 0000 0000
   y = 1011 1110 1101 0000 0000 0000 0000 0010

2. Separem els camps: signe, exponent, fracció

   x = 0 01111110 11000000000000000000000
   y = 1 01111101 01000000000000000000010

Exemple en base 2: $z = x \times y$

Suposem `x=0x3F600000`, `y=0xBED00002`

1. Els escrivim en binari

   x = 0011 1111 0110 0000 0000 0000 0000 0000
   y = 1011 1110 1101 0000 0000 0000 0000 0010

2. Separem els camps: signe, exponent, fracció

   x = 0 01111110 11000000000000000000000
   y = 1 01111101 10100000000000000000010

3. Convertim exponents a decimal, afegim bit ocult, i el signe

   $x = \mathbf{+1,}11000000000000000000000 \times 2^{-1}$
   $y = \mathbf{-1,}10100000000000000000010 \times 2^{-2}$

Exemple en base 2: $z = x \times y$

Suposem `x=0x3F600000, y=0xBED00002`

1. Els escrivim en binari

   x = 0011 1111 0110 0000 0000 0000 0000 0000
   y = 1011 1110 1101 0000 0000 0000 0000 0010

2. Separem els camps: signe, exponent, fracció

   x = 0 01111110 11000000000000000000000
   y = 1 01111101 10100000000000000000010

3. Convertim exponents a decimal, afegim bit ocult, i el signe

   x = **+1,**11000000000000000000000 × 2^{-1}
   y = **-1,**10100000000000000000010 × 2^{-2}

4. Producte de mantisses (ignorant zeros finals, part entera en negreta)

```
    1.11 ...(+20 zeros)
 ×  1.10100000000000000000010
 ------------------------------
                          111
      111
    111
  1.11
 ------------------------------------
10.1101100000000000000001110...(+20 zeros)
```

Exemple (cont.)

5. Suma d'exponents: $-1+(-2) = -3$

$$|z| = \mathbf{10,}1101100000000000000001110... \times 2^{-3}$$

Exemple (cont.)

5. Suma d'exponents: $-1+(-2) = -3$

$$|z| = \mathbf{10,}1101100000000000000001110... \times 2^{-3}$$

6. Normalitzar

$$|z| = \mathbf{1,}0110110000000000000001110... \times 2^{-2}$$

Exemple (cont.)

5. Suma d'exponents: $-1+(-2) = -3$

$$|z| = \mathbf{10,}1101100000000000000001110... \times 2^{-3}$$

6. Normalitzar

$$|z| = \mathbf{1,}0110110000000000000001110... \times 2^{-2}$$

7. Arrodonir (amunt)

$$\mathbf{1,}0110110000000000000001\boxed{\mathbf{110...}} \times 2^{-2}$$

$$+ \quad 1$$

$$|z| = \mathbf{1,}0110110000000000000000\mathbf{10} \times 2^{-2}$$

Exemple (cont.)

5. Suma d'exponents: $-1+(-2) = -3$

$$|z| = \mathbf{10,}1101100000000000000001110... \times 2^{-3}$$

6. Normalitzar

$$|z| = \mathbf{1,}0110110000000000000001110... \times 2^{-2}$$

7. Arrodonir (amunt)

$$\begin{array}{rl} & \mathbf{1,}0110110000000000000001\mathbf{110...} \times 2^{-2} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 1 \\ \hline |z| = & \mathbf{1,}0110110000000000000010 \times 2^{-2} \end{array}$$

8. Codificar l'exponent (en excés a 127)

$$-2 + 127 = 125 = 01111101$$

Exemple (cont.)

5. Suma d'exponents: $-1+(-2) = -3$

$$|z| = \mathbf{10,}1101100000000000000001110... \times 2^{-3}$$

6. Normalitzar

$$|z| = \mathbf{1,}0110110000000000000001110... \times 2^{-2}$$

7. Arrodonir (amunt)

$$\begin{array}{rl} & \mathbf{1,}0110110000000000000001\mathbf{110...} \times 2^{-2} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 1 \\ \hline |z| = & \mathbf{1,}0110110000000000000010 \times 2^{-2} \end{array}$$

8. Codificar l'exponent (en excés a 127)

$$-2 + 127 = 125 = 01111101$$

9. Ajuntar signe (negatiu), exponent i mantissa (sense el bit ocult!)

$$\begin{aligned} z &= 1\ 01111101\ 01101100000000000000010 \\ &= 1011\ 1110\ 1011\ 0110\ 0000\ 0000\ 0000\ 0010 \\ &= \mathbf{0xBEB60002} \end{aligned}$$

Aritmètica de coma flotant

- Introducció
- Estàndard IEEE-754: Format
- Rang, precisió i arrodoniment
- Codificacions especials, underflow i nombres denormals
- Conversions entre base 10 i base 2
- Operacions: suma, resta, bits de guarda, multiplicació i divisió
- Coma flotant en MIPS
- Associativitat de la suma

Coma flotant en el MIPS

- Coprocesador de coma flotant
  - Històricament, els processadors tenien la unitat de coma flotant (FPU) en un xip opcional separat de la CPU
  - La ISA de MIPS conserva aquesta distinció, encara que actualment les FPUs són part de la CPU: la FPU de MIPS rep el nom de CP1 (co-processador 1)

Coma flotant en el MIPS

- Coprocesador de coma flotant
  - Històricament, els processadors tenien la unitat de coma flotant (FPU) en un xip opcional separat de la CPU
  - La ISA de MIPS conserva aquesta distinció, encara que actualment les FPUs són part de la CPU: la FPU de MIPS rep el nom de CP1 (co-processador 1)
  - Banc de registres propi: 32 registres de 32 bits: `$f0,... $f31`
  - Cada registre pot contenir un "float"
  - Per operar "doubles", només s'usen registres parells: `$f0,$f2,...`

Coma flotant en el MIPS

- Coprocesador de coma flotant
  - Històricament, els processadors tenien la unitat de coma flotant (FPU) en un xip opcional separat de la CPU
  - La ISA de MIPS conserva aquesta distinció, encara que actualment les FPUs són part de la CPU: la FPU de MIPS rep el nom de CP1 (co-processador 1)
  - Banc de registres propi: 32 registres de 32 bits: `$f0,... $f31`
  - Cada registre pot contenir un "float"
  - Per operar "doubles", només s'usen registres parells: `$f0,$f2,...`
  - Hi ha un registre de control addicional per reportar excepcions, configurar els modes d'arrodoniment, etc.

Instruccions MIPS

- Accés a memòria

Simple precisió	Doble precisió
`lwc1 ft, offset(rs)`	`ldc1 ft, offset(rs)`
`swc1 ft, offset(rs)`	`sdc1 ft, offset(rs)`

Instruccions MIPS

- Accés a memòria

Simple precisió	Doble precisió
`lwc1 ft, offset(rs)`	`ldc1 ft, offset(rs)`
`swc1 ft, offset(rs)`	`sdc1 ft, offset(rs)`

- Aritmètiques

Simple precisió	Doble precisió
`add.s fd,fs,ft`	`add.d fd,fs,ft`
`sub.s fd,fs,ft`	`sub.d fd,fs,ft`
`mul.s fd,fs,ft`	`mul.d fd,fs,ft`
`div.s fd,fs,ft`	`div.d fd,fs,ft`

Instruccions de coma flotant

- Còpia entre registres

`mfc1 rt, fs`	→ copia de `fs` a `rt`
`mtc1 rt, fs`	→ copia de `rt` a `fs`
`mov.s fd, fs`	→ copia de `fs` a `fd`

Instruccions de coma flotant

- Còpia entre registres

`mfc1 rt, fs`	→ copia de `fs` a `rt`
`mtc1 rt, fs`	→ copia de `rt` a `fs`
`mov.s fd, fs`	→ copia de `fs` a `fd`

- Comparació

Simple precisió	Doble precisió
`c.xx.s fs,ft`	`c.xx.d fs,ft`

  - on `xx` ∈ {`eq`,`lt`,`le`}
  - Escriu el resultat al *bit de condició* (és un registre intern)

Instruccions de coma flotant

- Còpia entre registres

`mfc1 rt, fs`	→	copia de `fs` a `rt`
`mtc1 rt, fs`	→	copia de `rt` a `fs`
`mov.s fd, fs`	→	copia de `fs` a `fd`

- Comparació

Simple precisió	Doble precisió
`c.xx.s fs,ft`	`c.xx.d fs,ft`

  - on `xx` ∈ {`eq`, `lt`, `le`}
  - Escriu el resultat al *bit de condició* (és un registre intern)

- Salt

`bc1t etiqueta`	→	salta si el *bit de condició* = `TRUE`
`bc1f etiqueta`	→	salta si el *bit de condició* = `FALSE`

Declaracions

- Declaració de variables globals de coma flotant
  - En C

```
float v[2] = {3.1416, -3.5E2};
double x = 3E350, y;
```

  - En MIPS

```
        .data
v:      .float 3.1416, -3.5E2
x:      .double 3E350
y:      .double 0.0
```

  - Alineen a adreces múltiples de 4 (`.float`) o de 8(`.double`)

Subrutines

- Pas de paràmetres i resultats a subrutines
  - Nota: La mescla de paràmetres de coma flotant amb altres enters segueix en MIPS unes regles complexes, que no estudiarem en EC. Sols estudiarem un cas
    - Quan tenim sols **1 o 2 paràmetres de tipus “float”**

Subrutines

- Pas de paràmetres i resultats a subrutines
  - Nota: La mescla de paràmetres de coma flotant amb altres enters segueix en MIPS unes regles complexes, que no estudiarem en EC. Sols estudiarem un cas
    - Quan tenim sols **1 o 2 paràmetres de tipus "float"**
  - Paràmetres: en `$f12` i `$f14`
  - Resultat: en `$f0`
  - Registres "segurs": del `$f20` al `$f31`

Exemple: traduir la funció `func()`

```
float func (float x)
{
  if (x < 1.0)
   return x * x;
  else
   return 2.0 - x;
}
```

```
            .data
const1:     .float 1.0

            .text
            ...
func:
```

Guardem la constant 1.0 en memòria

Exemple: traduir la funció `func()`

```
float func (float x)
{
  if (x < 1.0)
   return x * x;
  else
   return 2.0 - x;
}
```

```
            .data
const1:     .float 1.0

            .text
            ...
func:
    la      $t0, const1
    lwc1    $f16, 0($t0)      # $f16 = 1.0
```

Carreguem la constant 1.0 en $f16

Exemple: traduir la funció `func()`

```
float func (float x)
{
  if (x < 1.0)
    return x * x;
  else
    return 2.0 - x;
}
```

```
            .data
const1:     .float 1.0

            .text
            ...
func:
    la      $t0, const1
    lwc1    $f16, 0($t0)        # $f16 = 1.0
    c.lt.s  $f12, $f16          # x < 1.0?
    bc1f    else                # br. if false
```

Si x < 1.0 és fals, saltem a else

Exemple: traduir la funció `func()`

```
float func (float x)
{
  if (x < 1.0)
   return x * x;
  else
   return 2.0 - x;
}
```

```
            .data
const1:     .float 1.0

            .text
            ...
func:
    la      $t0, const1
    lwc1    $f16, 0($t0)        # $f16 = 1.0
    c.lt.s  $f12, $f16          # x < 1.0?
    bc1f    else                # br. if false
    mul.s   $f0, $f12, $f12     # x * x
    b       fisi
```

El paràmetre x està en $f12

Exemple: traduir la funció `func()`

```
float func (float x)
{
  if (x < 1.0)
   return x * x;
  else
   return 2.0 - x;
}
```

Calculem la constant 2.0

```
            .data
const1:     .float 1.0

            .text
            ...
func:
    la      $t0, const1
    lwc1    $f16, 0($t0)        # $f16 = 1.0
    c.lt.s  $f12, $f16          # x < 1.0?
    bc1f    else                # br. if false
    mul.s   $f0, $f12, $f12     # x * x
    b       fisi
else:
    add.s   $f16, $f16, $f16 # 1.0 + 1.0
```

Exemple: traduir la funció `func()`

```
float func (float x)
{
  if (x < 1.0)
   return x * x;
  else
   return 2.0 - x;
}
```

```
                .data
const1:         .float 1.0

                .text
                ...
func:
    la      $t0, const1
    lwc1    $f16, 0($t0)        # $f16 = 1.0
    c.lt.s  $f12, $f16          # x < 1.0?
    bc1f    else                # br. if false
    mul.s   $f0, $f12, $f12     # x * x
    b       fisi
else:
    add.s   $f16, $f16, $f16 # 1.0 + 1.0
    sub.s   $f0, $f16, $f12     # 2.0 - x
fisi:
    jr      $ra
```

Aritmètica de coma flotant

- Introducció
- Estàndard IEEE-754: Format
- Rang, precisió i arrodoniment
- Codificacions especials, underflow i nombres denormals
- Conversions entre base 10 i base 2
- Operacions: suma, resta, bits de guarda, multiplicació i divisió
- Coma flotant en MIPS
- Associativitat de la suma

Associativitat de la suma

- La suma de números en coma flotant **no** té la propietat associativa

$$x + (y + z) \neq (x + y) + z$$

Associativitat de la suma

- La suma de números en coma flotant **no** té la propietat associativa

$$x + (y + z) \neq (x + y) + z$$

- Suposem $x = -1{,}5 \times 10^{38}$, $y = 1{,}5 \times 10^{38}$, $z = 1{,}0$

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= -1{,}5 \times 10^{38} + (1{,}5 \times 10^{38} + 1{,}0) \\ &= -1{,}5 \times 10^{38} + 1{,}5 \times 10^{38} \\ &= 0{,}0 \end{aligned}$$

Associativitat de la suma

- La suma de números en coma flotant **no** té la propietat associativa

$$x + (y + z) \neq (x + y) + z$$

- Suposem $x = -1{,}5 \times 10^{38}$, $y = 1{,}5 \times 10^{38}$, $z = 1{,}0$

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= -1{,}5 \times 10^{38} + (1{,}5 \times 10^{38} + 1{,}0) \\ &= -1{,}5 \times 10^{38} + 1{,}5 \times 10^{38} \\ &= 0{,}0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= (-1{,}5 \times 10^{38} + 1{,}5 \times 10^{38}) + 1{,}0 \\ &= 0{,}0 + 1{,}0 \\ &= 1{,}0 \end{aligned}$$

Exercici: sumar $z = x + y$

Suposem x=3DC00046, y=0xC0800004

1. Els escrivim en binari

   x = 0011 1101 1100 0000 0000 0000 0100 0110

   y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100

Exercici: sumar $z = x + y$

Suposem x=3DC00046, y=0xC0800004

1. Els escrivim en binari

   x = 0011 1101 1100 0000 0000 0000 0100 0110

   y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100

2. Separem els camps: signe, exponent, fracció

   x = 0 01111011 10000000000000001000110

   y = 1 10000001 00000000000000000000100

Exercici: sumar $z = x + y$

Suposem x=3DC00046, y=0xC0800004

1. Els escrivim en binari

   x = 0011 1101 1100 0000 0000 0000 0100 0110
   y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100

2. Separem els camps: signe, exponent, fracció

   x = 0 01111011 10000000000000001000110
   y = 1 10000001 00000000000000000000100

3. Convertim exponents a decimal, afegim bit ocult, i el signe

   01111011 = 123 → E = 123 − 127 = −4
   10000001 = 129 → E = 129 − 127 = 2

Exercici: sumar $z = x + y$

Suposem x=3DC00046, y=0xC0800004

1. Els escrivim en binari

   x = 0011 1101 1100 0000 0000 0000 0100 0110
   y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100

2. Separem els camps: signe, exponent, fracció

   x = 0 01111011 10000000000000001000110
   y = 1 10000001 00000000000000000000100

3. Convertim exponents a decimal, afegim bit ocult, i el signe

   01111011 = 123 → E = 123 − 127 = −4
   10000001 = 129 → E = 129 − 127 = 2

   x = **+1,**10000000000000001000110 × 2^{-4}
   y = **−1,**00000000000000000000100 × 2^{2}

Exercici: sumar $z = x + y$

Suposem x=3DC00046, y=0xC0800004

1. Els escrivim en binari

   x = 0011 1101 1100 0000 0000 0000 0100 0110
   y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100

2. Separem els camps: signe, exponent, fracció

   x = 0 01111011 10000000000000001000110
   y = 1 10000001 00000000000000000000100

3. Convertim exponents a decimal, afegim bit ocult, i el signe

   01111011 = 123 → E = 123 − 127 = −4
   10000001 = 129 → E = 129 − 127 = 2

   x = **+1,**10000000000000001000110 × 2^{-4}
   y = **-1,**00000000000000000000100 × 2^{2}

4. Igualem al major (2) l'exponent de *x*, desplaçant la coma 6 llocs

   x = **+0,**000001**1**10000000000000001**000110** × 2^{2}
   bits extra

Exercici: sumar $z = x + y$

Suposem x=3DC00046, y=0xC0800004

1. Els escrivim en binari

   x = 0011 1101 1100 0000 0000 0000 0100 0110
   y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100

2. Separem els camps: signe, exponent, fracció

   x = 0 01111011 10000000000000001000110
   y = 1 10000001 00000000000000000000100

3. Convertim exponents a decimal, afegim bit ocult, i el signe

   01111011 = 123 → E = 123 − 127 = −4
   10000001 = 129 → E = 129 − 127 = 2

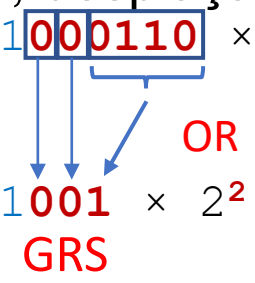
   x = **+1,**10000000000000001000110 × 2^{-4}
   y = **−1,**00000000000000000000100 × 2^{2}

4. Igualem al major (2) l'exponent de *x*, desplaçant la coma 6 llocs

   x = **+**0,00000**1**10000000000000001**000110** × 2^{2}

5. Determinem els bits de guarda G, R, S

   x = **+**0,00000**1**10000000000000001**001** × 2^{2}
   GRS



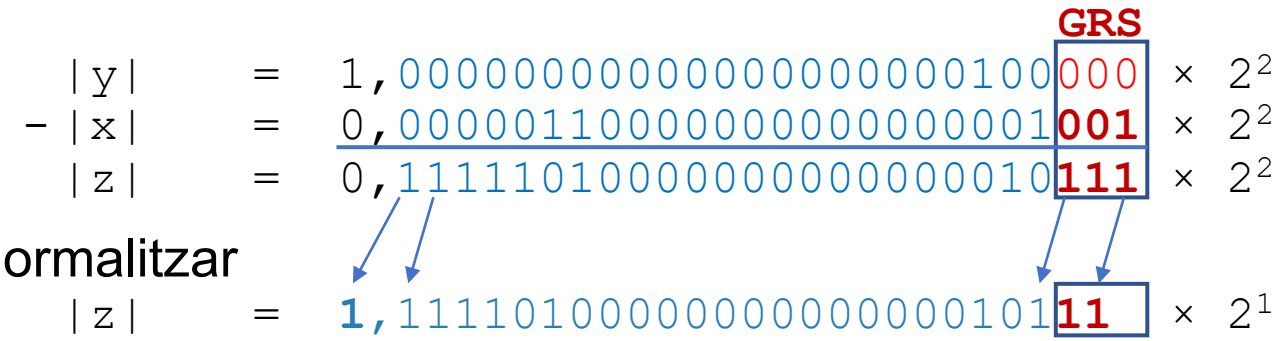
Exercici: sumar $z = x + y$

6. Sumar magnituds: signes diferents ⇒ restar de la major: |y| – |x|

$$
\begin{array}{rcl}
|y| & = & 1,0000000000000000000010\,\underbrace{000}_{\text{GRS}} \times 2^2 \\
-\,|x| & = & 0,0000011000000000000001\,\underbrace{001}_{\text{GRS}} \times 2^2 \\
\hline
|z| & = & 0,1111101000000000000010\,\underbrace{111}_{\text{GRS}} \times 2^2
\end{array}
$$

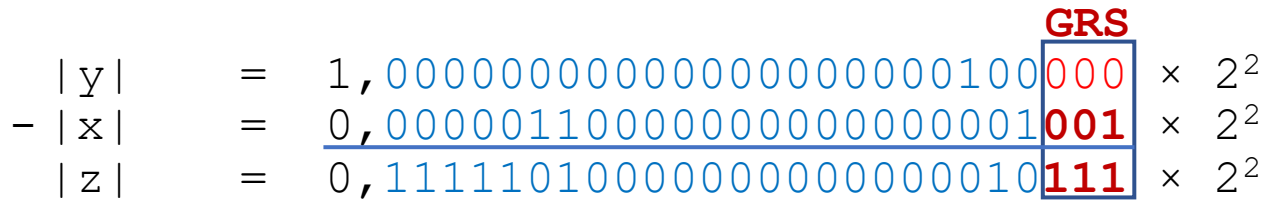
Exercici: sumar $z = x + y$

6. Sumar magnituds: signes diferents ⇒ restar de la major: |y| – |x|



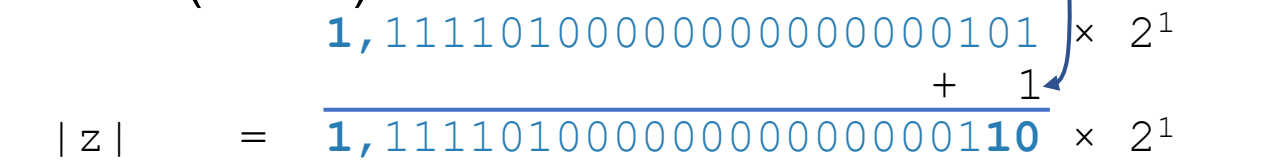
Exercici: sumar $z = x + y$

6. Sumar magnituds: signes diferents ⇒ restar de la major: |y| – |x|



7. Normalitzar

8. Arrodonir (amunt)



Exercici: sumar $z = x + y$

6. Sumar magnituds: signes diferents ⇒ restar de la major: |y| – |x|

$$
\begin{array}{rcl}
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{GRS} \\
|y| & = & 1,000000000000000000000100\boxed{000} \times 2^{2} \\
-\,|x| & = & 0,000001100000000000000001\boxed{001} \times 2^{2} \\
\hline
|z| & = & 0,111110100000000000000010\boxed{111} \times 2^{2}
\end{array}
$$

7. Normalitzar

$$
|z| = 1,11110100000000000000101\boxed{11} \times 2^{1}
$$

8. Arrodonir (amunt)

$$
\begin{array}{rcl}
 & & 1,11110100000000000000101 \times 2^{1} \\
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \quad 1 \\
\hline
|z| & = & 1,11110100000000000000110 \times 2^{1}
\end{array}
$$

9. Codificar exponent (en excés)

E → 1+127 = 128 = 10000000

Exercici: sumar $z = x + y$

6. Sumar magnituds: signes diferents ⇒ restar de la major: |y| – |x|

```
                                                          GRS
    |y|     =  1,00000000000000000000100000  × 2^2
  - |x|     =  0,00000110000000000000001001  × 2^2
    |z|     =  0,11111010000000000000010111  × 2^2
```

7. Normalitzar

```
    |z|     =  1,11110100000000000001011111  × 2^1
```

8. Arrodonir (amunt)

```
                1,11110100000000000001 01  × 2^1
                                     +  1
    |z|     =   1,11110100000000000001 10  × 2^1
```

9. Codificar exponent (en excés)

E → 1+127 = 128 = 10000000

10. Ajuntar signe (negatiu=1), exponent i fracció (sense el bit ocult)

```
    z       =  1 10000000 11110100000000000000110
            =  1100 0000 0111 1010 0000 0000 0000 0110
            =  0xC07A0006
```